

# Maîtrise statistique des processus (MSP)

## Utilisation des cartes de contrôle

par **Gérard BRUNSCHWIG**

*Ingénieur Général honoraire des Ponts et Chaussées*

et **Alain PALSKEY**

*Ingénieur, Responsable MSP ou groupe Rhône-Poulenc*

<b>1. Paramètres des processus et caractéristiques des produits à maîtriser</b> .....	R 290 - 2
1.1 Paramètres du processus.....	— 2
1.2 Caractéristiques du produit .....	— 2
1.2.1 Pour un produit nouveau .....	— 2
1.2.2 Pour un produit existant .....	— 3
<b>2. Variabilité d'un processus</b> .....	— 3
<b>3. Capabilité d'un processus, d'un moyen de production, d'un moyen de mesure</b> .....	— 3
3.1 Capabilité du processus de fabrication.....	— 4
3.2 Capabilité du moyen de production.....	— 5
3.3 Capabilité du moyen de mesure .....	— 5
<b>4. Contrôle en cours de fabrication</b> .....	— 5
4.1 Cartes de contrôle aux mesures.....	— 5
4.1.1 Cartes aux moyennes.....	— 5
4.1.2 Cartes de la dispersion (cf. norme AFNOR X 06-031.1).....	— 11
4.2 Cartes de contrôle aux attributs (cf. norme AFNOR X 06-031.2) .....	— 11
4.2.1 Référence du processus .....	— 13
4.2.2 Efficacité du contrôle aux attributs .....	— 13
4.2.3 Cartes de contrôle aux attributs .....	— 13
4.3 Fréquence d'échantillonnage (cf. norme AFNOR X 06-031.0) .....	— 15
<b>5. Contrôle de réception ou d'acceptation</b> .....	— 16
5.1 Généralités .....	— 16
5.2 Contrôle de réception aux attributs .....	— 17
5.2.1 Choix d'un plan d'échantillonnage .....	— 17
5.2.2 Lots isolés ou en petit nombre .....	— 17
5.2.3 Séries continues de lots .....	— 19
5.3 Contrôle de réception par mesures.....	— 20
5.3.1 Lots isolés ou en petit nombre .....	— 20
5.3.2 Séries continues de lots en provenance du même fabricant.....	— 21
<b>Pour en savoir plus</b> .....	Doc. R 290

**O**n appelle **Maîtrise Statistique de Processus (MSP)**, ou en anglais **Statistical Process Control (SPC)**, l'ensemble des méthodes et des actions permettant d'évaluer de façon statistique les performances d'un processus de production (au sens large), et de décider de le régler, si nécessaire, pour maintenir les caractéristiques des produits stables et conformes aux spécifications retenues. C'est un des éléments dynamiques du **système qualité** qui concourt à l'amélioration permanente des productions (cf. AFNOR FD X 06-030).

On entend par « **processus de production** » l'ensemble des éléments qui concourent à la production : matières premières, machine, main-d'œuvre, milieu, méthode, que l'on représente souvent schématiquement par le diagramme des 5 M (figure **A**).

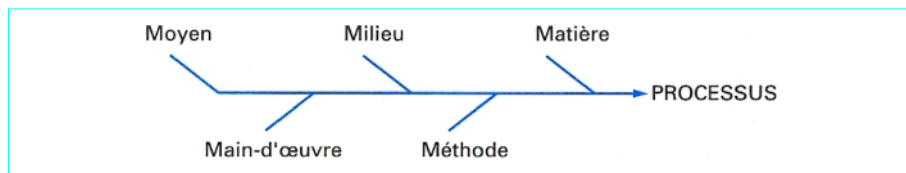


Figure A – Diagramme des 5M

La MSP ne se limite pas à l'établissement de cartes de contrôle et à leur exploitation pour régler des « machines » et maîtriser des processus : c'est une suite d'analyses qui comprend :

- une réflexion sur le processus ;
- une étude de l'aptitude des procédés de fabrication et de contrôle qui constituent le processus, ce qui permet de choisir ou de modifier les appareillages à utiliser et de fixer correctement les spécifications ;
- le choix et la mise en œuvre de méthodes statistiques de contrôle en cours de fabrication ;
- le contrôle final, si nécessaire, de la qualité livrée ;
- l'exploitation des informations accumulées afin d'améliorer la connaissance du processus (identification et suppression progressive des causes de dérives).

La MSP est une **méthode préventive de gestion de la qualité** qui vise à amener tout processus au niveau requis de régularité de qualité et à l'y maintenir grâce à un système de surveillance statistique permettant de réagir rapidement et efficacement à des dérives, évitant ainsi la production de produits non conformes.

La MSP concerne essentiellement des fabrications de **moyennes et grandes séries**.

Elle trouve naturellement sa place dans le développement des méthodes de gestion et d'assurance de la qualité, standardisées dans les normes ISO série 9 000 (AFNOR correspondantes : NF X 50-121 et suivantes).

## 1. Paramètres des processus et caractéristiques des produits à maîtriser

Tous les paramètres d'un processus et toutes les caractéristiques d'un produit ne font pas l'objet de la MSP : seuls les facteurs considérés comme essentiels pour le client ou l'entreprise sont concernés par cette démarche, d'où l'intérêt d'évaluer le rapport [bénéfices qualitatifs et quantitatifs attendus/ « investissement » de mise en place].

### 1.1 Paramètres du processus

Pour maîtriser un processus, il est préférable de travailler sur les paramètres de ce processus plutôt que sur les caractéristiques du produit, lorsque c'est possible, c'est-à-dire lorsque les relations causes-effets sont identifiées et au moins sommairement quantifiées (exemple : effet de la température sur la viscosité d'un polymère).

Différents **outils** peuvent être utilisés pour cette recherche, parmi lesquels :

- arbre de défaillance ou arbre des causes ;
- diagramme causes-effets (appelé aussi « en arêtes de poisson » ou « d'Ishikawa ») ;

- études de corrélations et de régressions ;
- plans d'expérience ;
- analyse en composantes principales...

### 1.2 Caractéristiques du produit

La MSP étant un **outil de prévention**, elle doit être utilisée là où il y a nécessité de réduire la probabilité d'apparition d'une non-conformité sur :

- une caractéristique essentielle d'un produit qui, non respectée, causera une insatisfaction du client ;
- une caractéristique non essentielle à l'usage chez le client mais qui, si elle n'est pas respectée, peut générer des surcoûts, des manques à gagner importants pour l'entreprise.

**Remarque** : les termes « produit », « fournisseur » et « client » sont pris au sens de la Maîtrise Totale de la Qualité : il peut s'agir d'un produit intermédiaire et d'une relation client-fournisseur au sein d'une même entreprise.

#### 1.2.1 Pour un produit nouveau

- Si la technologie d'élaboration est connue, on fera l'analogie avec des produits existants utilisant le même type de technologie.
- Si la technologie est nouvelle, il faudra identifier les points à risque en utilisant des outils de fiabilité comme par exemple l'**AMDEC** produits/processus (Analyse des Modes de Défaillances, de leurs Effets et de leurs Criticités).

### 1.2.2 Pour un produit existant

- Examen des réclamations et classement de ces réclamations en fonction des coûts, fréquence et gravité : **diagramme de Pareto**.
- Analyse des raisons de ces réclamations : **arbre des causes**.
- Mise en place de **cartes de contrôle ou de procédures** (modes opératoires) évitant ces réclamations.
- Analyse des **surcoûts internes** (retouches, reprises, recyclages, tris...) : **diagramme de Pareto**.
- Recherche des causes des surcoûts et gains potentiels pour l'entreprise : chiffrage des « coûts de non-conformité » (CONC), que l'on appelle aussi de façon plus positive « **potentiel de progrès économique** » (POPE).

## 2. Variabilité d'un processus

L'utilisation de techniques statistiques simples pour conduire un processus de fabrication permet :

- de prévenir les effets de dérèglages au lieu de les subir et de trier la production *a posteriori* ;
- d'éviter le contrôle à 100 % (contrôle de toutes les unités produites) ;
- de rationaliser les plans d'échantillonnage (nombre et fréquence des contrôles) plutôt que de les choisir « par expérience » (souvent à l'inspiration).

Ces techniques statistiques utilisent la méthode d'évaluation de la qualité par le contrôle d'un échantillon limité à quelques unités ( $n$ ) pour estimer la qualité moyenne de toutes les unités produites. Pour la caractéristique  $X$  choisie, la valeur  $\bar{x}$  moyenne des  $n$  mesures effectuées sur les  $n$  unités prélevées est une estimation de la valeur moyenne de  $X$  pour les  $N$  unités produites.

La **variabilité totale d'un processus** (statistiquement, la variance  $V_t(x) = \sigma^2$ , carré de l'écart-type de la distribution) est la somme des variabilités (variances  $V_i(x) = \sigma_i^2$ ) des  $i$  éléments (matières premières, machine, prélèvements, préparation et analyse des prélèvements...) qui le composent :

$$V_t(x) = \sum_i V_i(x)$$

#### Exemple

Une ligne de fabrication d'un produit hygroscopique possède sa propre variance « machine »  $V_M$ . Mais on ne peut juger cette variabilité que par la mesure du taux d'humidité du produit qui a elle-même sa variance  $V_m$ . On peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \text{variance totale} \\ \text{du processus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{variance de} \\ \text{la machine} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{variance de} \\ \text{la mesure} \end{bmatrix}$$

$$V_t(x) = V_M(x) + V_m(x)$$

Mais la variance de la mesure peut elle-même être scindée en différents éléments  $V_{mi}$  : l'opérateur qui prélève ce produit apporte sa propre variabilité selon qu'il ferme le flacon plus ou moins rapidement ; il faut ajouter 3 gouttes d'acide au produit avant analyse et, si la même pipette n'est pas utilisée à chaque fois, c'est une cause de variabilité supplémentaire ; en se conformant à la procédure d'analyse, il faut attendre 10 min de stabilisation de la préparation avant analyse : en fonction du chronomètre utilisé, ce temps sera variable ; enfin, il faut ajouter la variabilité intrinsèque de l'appareil de mesure qui ne fournira jamais, *a priori*, le même résultat sur la même préparation.

De façon plus générale, on pourra donc dire :

$$V_t(x) = V_M(x) + \sum V_{mi}(x) + v_e(x) \tag{1}$$

$v_e(x)$  étant la partie résiduelle de variance dont on ne connaît pas les causes.

L'analyse des variabilités propres à chacune des étapes s'appelle une **analyse de variance**. Elle est particulièrement utile, dans le cas où un processus n'est pas ou est peu capable de respecter les tolérances, pour savoir où il faut faire porter les efforts de progrès : la machine ou la chaîne de mesure. En effet, on connaît d'une part la variance totale du processus et l'on peut estimer d'autre part la variance de la chaîne de mesure par une étude de fidélité (cf. ISO 5725 parties 1 et 2). Par différence, à la variance résiduelle près, on peut estimer la variance de la machine.

Nota :

ISO 5725 1994 Exactitude (justesse et fidélité) des méthodes et résultats de mesure.

Partie 1. Principes généraux et définitions.

Partie 2. Méthode de base pour la détermination de la répétabilité et de la reproductibilité d'une méthode de mesure normalisée.

## 3. Capacité d'un processus, d'un moyen de production, d'un moyen de mesure

Quelle que soit la loi de distribution statistique d'un caractère mesuré, sa **dispersion** est définie *a priori* comme étant l'intervalle contenant 99,73 % des valeurs ; cet intervalle est de six écarts-types dans le cas d'une loi normale (figure 1).

La comparaison de la dispersion (6 écarts-types) d'un processus, d'une machine, ou d'un moyen de mesure à leurs intervalles de tolérance spécifiques *IT* s'appelle une **étude de capacité** (de l'anglais **capability**) qui s'exprime par un indicateur de forme générale :

$$C = \frac{IT}{6s} \tag{2}$$

$s$  étant une estimation de l'écart-type  $\sigma$  sur un nombre suffisant de mesures.

#### Remarques importantes :

- contrairement aux variances, ces indicateurs ne peuvent s'additionner, se soustraire ni être exprimés en pourcentages ;
- ces indicateurs n'ont de sens précis que pour des distributions assimilables à des lois normales, d'où l'intérêt de faire un **test de normalité** sur les valeurs mesurées ;
- $s$  peut être directement calculé à partir de toutes les valeurs sur une période très stable, on peut être estimé à partir des étendues  $w_i$  de  $k$  sous-groupes composés chacun d'un même nombre de  $n$  valeurs en périodes stables :

$$\bar{w} = \frac{\sum w_i}{k}$$

et

$$s = \frac{\bar{w}}{d_2}$$

$d_2$  dépendant de la taille  $n$  des sous-groupes (cf. tableau 1). (Rappelons que l'étendue  $w_i$  de l'échantillon est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs).

**Tableau 1 – Facteur  $d_2$  utilisé pour le calcul de l'estimation  $s$  de l'écart-type**

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d_2$	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078	3,173	3,258

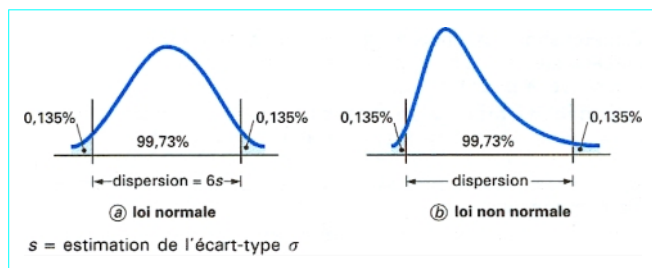


Figure 1 – Définition de la dispersion

### 3.1 Capabilité du processus de fabrication

L'objectif de cette étude est de s'assurer, préalablement à la mise en place d'une carte de contrôle, que la variabilité naturelle et le centrage du processus de production sont compatibles avec les tolérances de la caractéristique sélectionnée.

On prélève **de façon aléatoire** (égale probabilité de tirage de chaque élément) un échantillon **de au moins 100 pièces** non consécutives sur lequel on calcule la moyenne et l'écart-type de la caractéristique.

**Remarque :** deux écueils sont à éviter :

- prélever sur une trop longue période, incluant des modifications de consignes de marche, voire de matériel, qui seraient assimilées à des variations aléatoires du processus et conduiraient à surestimer la dispersion ;
- prélever sur une période trop courte, avec le risque que certains facteurs aléatoires n'aient pas eu le temps de jouer (par exemple, températures diurnes et nocturnes), et donc de sous-estimer la variabilité.

Les **indicateurs de capabilité**  $C_p$  et  $C_{pk}$  sont calculés par :

$$C_p = \frac{\text{Intervalle de tolérance du processus}}{\text{Dispersion du processus}} = \frac{IT}{6s} = \frac{T_s - T_i}{6s} \quad (3)$$

et

$$C_{pk} = \frac{\text{Distance entre moyenne observée et tolérance la plus proche}}{\text{Demi-dispersion du processus}}$$

$$C_{pk} = \min \left[ \frac{T_s - \bar{x}}{3s}; \frac{\bar{x} - T_i}{3s} \right] \quad (4)$$

- avec  $T_s$  tolérance supérieure,
- $T_i$  tolérance inférieure,
- $\bar{x}$  moyenne,
- $s$  estimation de l'écart-type.

Trois cas peuvent se présenter (figure 2).

Suivant les valeurs de  $C_p$  ou  $C_{pk}$ , on classe généralement la capabilité comme :

$C \leq 0,67$	très mauvaise
$0,67 < C \leq 1,00$	mauvaise
$1,00 < C \leq 1,33$	très moyenne
$1,33 < C \leq 1,67$	moyenne
$1,67 < C \leq 2,00$	bonne
$C > 2,00$	très bonne

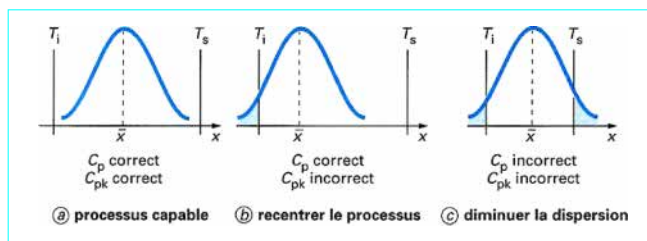


Figure 2 – Cas types pour la capabilité du processus

Ces indicateurs de qualité sont fondés *a priori* sur une dispersion égale à 6 écarts-types (99,73 % des valeurs). Ils sont internationalement reconnus et permettent donc un langage commun. Cependant, dans la pratique, le pourcentage de valeurs pouvant dépasser les tolérances ne sera pas choisi de la même façon qu'il s'agisse d'un produit pour détergence ou d'un médicament, qu'il s'agisse d'une boîte de jeux ou d'un équipement de sécurité automobile ou aéronautique. C'est pourquoi certains ajoutent parfois des indicateurs de capabilité plus spécifiques (qu'on peut appeler « **indicateurs spécifiques d'aptitude** » A pour les différencier) rapportés à une dispersion de  $k$  écarts-types dans laquelle on fait entrer une notion de **risque à l'utilisation du produit** :

$$A_p = \frac{IT}{ks} \quad (5)$$

$k$  étant défini par la loi normale réduite en fonction du pourcentage de valeurs qui doivent se trouver entre les tolérances.

On pourra également calculer  $A_{pk}$  en cas de dissymétrie de la distribution par rapport aux tolérances.

#### Exemples

■ On fabrique des boîtes en carton sur lesquelles il y a des tolérances de cotes ; on a trouvé sur l'une des cotes un écart-type  $s = 0,2$  mm et les tolérances sont  $T_s = 350$  mm,  $T_i = 348,5$  mm ; d'où :

$$C_p = \frac{T_s - T_i}{6s} = \frac{1,5}{6 \times 0,2} = 1,25$$

Mais, dans la pratique, il a été convenu avec le client qu'il n'est pas gênant de trouver, à la limite, jusqu'à une valeur sur cent hors tolérances de part et d'autre de la distribution, c'est-à-dire qu'il faut un minimum de 98 % des valeurs entre tolérances, correspondant à un intervalle  $k = 2 \times 2,33 = 4,66$  écarts-types (cf. caractéristiques de la loi normale réduite, [10]) :

$$A_p = \frac{T_s - T_i}{4,66s} = \frac{1,5}{4,66 \times 0,2} = 1,61 > C_p$$

■ Inversement, dans le cas où on cherche à avoir plus de 99,73 % de valeurs entre les tolérances (par exemple dans l'industrie pharmaceutique), l'aptitude est inférieure à la capabilité.

Quelle que soit la valeur de  $C_p$ , mais plus particulièrement lorsque la capabilité du processus n'est pas satisfaisante, il faut déterminer où se trouvent les variances les plus importantes (machine ou chaîne de mesure) et s'attacher à les diminuer pour améliorer la capabilité (cf. § 2).

Enfin, si le centrage d'une caractéristique est souhaitable d'un point de vue statistique, il peut ne pas l'être d'un point de vue économique : un axe en alliage précieux devra probablement avoir un diamètre moyen supérieur à la moyenne centrée, permettant la reprise des diamètres trop importants, plutôt qu'un diamètre centré obligeant à de nombreux retours en fonderie des pièces trop petites.

### 3.2 Capabilité du moyen de production

L'étude de la capabilité du moyen de production revêt un caractère particulièrement important lors de la réception et de la qualification d'un nouveau moyen de production (« machine »), ou lors du démarrage d'une nouvelle production.

On prélève, dans des conditions optimales de stabilité de fonctionnement, **une cinquantaine de pièces sur une courte durée** ; on calcule la moyenne de la caractéristique considérée et sa dispersion qu'on appelle ici **dispersion intrinsèque du moyen de production** (bien qu'elle fasse aussi intervenir la dispersion de répétabilité de la mesure).

On compare la dispersion trouvée à l'intervalle de tolérance  $IT'$  choisi au moyen des indices suivants :

$$C_m = \frac{\text{Intervalle de tolérance du moyen de production}}{\text{Dispersion intrinsèque du moyen de production}} = \frac{IT'}{6 s'} \quad (6)$$

et

$$C_{mk} = \frac{\text{Distance entre moyenne observée et tolérance la plus proche}}{\text{Demi-dispersion intrinsèque du moyen de production}}$$

$$C_{mk} = \min \left[ \frac{T'_s - \bar{x}}{3s'} ; \frac{\bar{x} - T'_i}{3s'} \right] \quad (7)$$

### 3.3 Capabilité du moyen de mesure

Il sera bon que la variance de la chaîne de mesure n'excède pas 10 % (au pire 20 %) de la variance totale du processus, sous peine que la mesure conduise à décider de régler le moyen de production alors qu'il est parfaitement centré.

On pourra estimer la **justesse** du système de mesure, c'est-à-dire l'écart d'accord entre la moyenne d'une grande série de résultats et une valeur de référence acceptée.

On pourra estimer la **répétabilité**, dispersion de résultats obtenus dans un temps court à partir d'un seul « objet », par un même opérateur dans un même lieu, sur un seul appareil, avec le même mode opératoire. Elle est surtout utilisée pour la comparaison de méthodes de mesure, car elle ne représente pas la dispersion de la mesure dans la vie réelle du processus.

On pourra enfin estimer la **reproductibilité** à partir d'un même « objet » et par la même méthode, mais avec des opérateurs différents, des appareils différents, etc. C'est en général la dispersion de reproductibilité qui est utilisée pour les études de variances et de capacités de la chaîne de mesure, car c'est elle qui intervient dans la vie du processus.

## 4. Contrôle en cours de fabrication

L'idée des **cartes de contrôle** est due à l'américain W. Shewhart (1931) ; leur utilisation, d'abord lente, a connu un premier développement en 1939-1945 aux États-Unis, et en Europe 10 ans plus tard. Quelques grandes industries françaises les ont employées plus systématiquement vers 1965 (par exemple l'industrie textile), et des centres de formation, particulièrement en France le CERESTA, ont fortement contribué dès cette époque à leur utilisation. Mais le

moteur de leur développement actuel sont les normes Qualité ISO 9000, reprises par la normalisation européenne (CEN) ; leur vulgarisation a été facilitée par les normes statistiques AFNOR/ISO, et l'enseignement pratique des statistiques dans les écoles d'ingénieurs.

Nota :

CERESTA : Centre d'enseignement et de recherche de la statistique appliquée

CEN : Comité européen de normalisation

AFNOR : Association française de normalisation

ISO : International Organization for Standardization

Les méthodes statistiques de contrôle utilisées pour maîtriser un processus font appel à la théorie de l'échantillonnage et permettent de définir quand un processus a probablement dérivé (en moyenne ou en dispersion) en s'aidant de tracés, appelés **cartes de contrôle**, où l'on reporte les moyennes de valeurs d'échantillons par rapport à des **limites de contrôle**. L'usage a consacré ces tracés sous le vocable « cartes de contrôle » (de l'anglais *control charts*), bien qu'il aurait été plus judicieux de les appeler en français « cartes de maîtrise » ou « cartes de conduite ».

Pour un **caractère mesuré** (par exemple, une cote de pièce mécanique), on construira une carte de contrôle de la cible centrale (souvent la moyenne de  $N$  pièces, mais parfois une valeur nominale ou une valeur souhaitée non centrée) et une estimation de la dispersion figurée par l'écart-type  $s$  des échantillons, ou par leur étendue  $w$  (différence entre les valeurs extrêmes de l'échantillon).

Pour un **caractère qualitatif** (pièces « bonnes » ou « mauvaises »), on estimera à l'aide de cartes de contrôle la proportion de pièces non conformes produites, ou le nombre de non-conformités par pièce s'il peut en exister plusieurs.

On discernera donc, les **cartes de contrôle « aux mesures »** des **cartes de contrôle « aux attributs »** qui ne font pas intervenir les mêmes lois statistiques : dans le premier cas loi normale, dans le second loi binomiale ou de Poisson.

### 4.1 Cartes de contrôle aux mesures

Le principe du contrôle statistique aux mesures consiste, après avoir établi une « référence » à partir d'un nombre suffisant de « pièces » ( $N > 100$ ) pendant une période stable de fabrication, à prélever régulièrement des échantillons de taille  $n$  et à comparer leurs moyennes et dispersions à la moyenne et à la dispersion de référence.

On distinguera les **cartes aux moyennes**, permettant de détecter si la moyenne du processus dérive, des **cartes de dispersion**, permettant de mettre en évidence des changements de variabilité du processus.

#### 4.1.1 Cartes aux moyennes

##### 4.1.1.1 Référence et capabilité du processus

Les valeurs individuelles mesurées d'une caractéristique  $X$  suivent le plus souvent une loi de distribution proche de la loi normale. Il existe des exceptions.

**Exemples de ces exceptions** : pureté d'un métal qui tend vers 100 %, siccité d'un produit chimique qui tend vers 0 ; ces grandeurs, physiquement bornées, suivent souvent une loi log-normale : on se ramène dans ce cas à une loi normale par une transformation de la variable  $X$  en  $X' = \log(X)$ .

Sur une période de fonctionnement stable du processus, prise comme référence, on estime les paramètres moyenne et écart-type ( $\mu_0, \sigma_0$ ) de la loi normale à partir de  $N$  valeurs individuelles  $x_i$  ( $N > 100$ ) en s'assurant au préalable qu'on n'est pas trop éloigné

de l'hypothèse de normalité (tests de normalité : cf. norme AFNOR X 06-050) :

$$m_0 = \frac{\sum x_i}{N} \quad \text{estimation de } \mu_0 \quad (8)$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m_0)^2}{N-1}} \quad \text{estimation de } \sigma_0 \quad (9)$$

Si des tolérances ( $T_i$ ,  $T_s$ ) sur valeurs individuelles ont été données, on calcule les indicateurs de capabilité du processus  $C_p$  et  $C_{pk}$  (cf. § 3). Si  $C_{pk}$  est différent de  $C_p$ , on regarde si le procédé peut être recentré : on adopte alors *a priori* cette valeur centrée pour cible et non  $m_0$  calculée.

#### 4.1.1.2 Assurance qualité et déplacement limite $\delta$ de la moyenne

La maîtrise totale de la qualité vise à assurer le « zéro défaut » au client : statistiquement « aucune valeur en dehors d'un intervalle donné » n'existe que pour l'intervalle compris entre  $\pm \infty$  : il faut donc statistiquement assimiler ce « zéro défaut » à une très faible probabilité (en général 0,135 % pour chaque tolérance) que le client trouve une valeur hors tolérances : cette probabilité correspond à un intervalle de  $\pm 3$  écarts-types autour de la moyenne.

Si la moyenne du processus dérive d'une quantité  $\delta$  à partir de  $m_0$ , il faudra donc qu'elle ne dépasse pas une certaine valeur limite  $m_1$  qui assurera encore ce « zéro défaut » (figure 3). Pour cela, il faudra avoir une efficacité de contrôle telle (taille d'échantillon) qu'elle assure de détecter cette dérive avec de faibles risques de se tromper. Dans le cas de deux tolérances, on aura deux limites  $m_1$  et  $m'_1$ .

Si l'équivalence du « zéro défaut » est 0,135 %, comme il est communément admis, les limites de déplacement de la moyenne se trouveront à 3 écarts-types en retrait des tolérances ; mais si la caractéristique concerne un équipement touchant à la sécurité humaine, ces limites devront être bien plus en retrait ; à l'inverse si le client peut admettre sans risque pour l'utilisation un produit dont le pourcentage de valeurs hors tolérances aille jusqu'à 1 %, ces limites ne seront en retrait des tolérances que de 2,33 écarts-types (cf. § 3.1).

Tout processus dérive dans le temps :

— sous l'effet de causes déterminées (on dit aussi « assignables ») qu'on s'efforcera de réduire pas à pas (les cartes de contrôle sont un très bon outil pour les découvrir) ;

— sous les effets de causes aléatoires qui peuvent se conjuguer momentanément dans le même sens : il faudra alors agir sur un paramètre connu pour en minimiser les effets sur la période considérée.

La dérive maximale de la moyenne du processus que l'on peut tolérer pour assurer le « zéro défaut » peut s'exprimer en nombre d'écarts-types par :

$$\delta = \min \left[ \frac{m_1 - m_0}{s}; \frac{m_0 - m'_1}{s} \right] \quad (10)$$

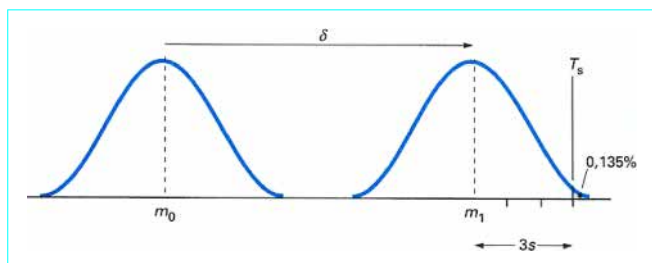


Figure 3 - Déplacement limite de la moyenne

Il faudra avoir une efficacité de contrôle qui assure une très forte probabilité de détecter ce dérèglement  $\delta$  (voir § 4.1.1.3 les risques décisionnels).

#### Exemple

- La valeur ciblée de la cote d'une pièce est  $m_0 = 75$  mm.
- Sur une période stable, on a déterminé un écart-type du processus  $s_0 = 0,5$  mm.
- Les tolérances en valeurs individuelles sont  $\pm 2$  mm.
- L'équivalent du « zéro défaut » est une probabilité de 0,135 % de valeurs hors tolérances.

- Capabilité du processus [relation (2)] :

$$C_p = \frac{4}{6 \times 0,5} = 1,33 = A_p$$

- Moyennes limites :

$$\begin{cases} m_1 = T_s - 3s = 77 - (3 \times 0,5) = 75,5 \\ m'_1 = T_i + 3s = 73 + (3 \times 0,5) = 74,5 \end{cases}$$

- Déplacement maximal de la moyenne en nombre d'écarts-types :

$$\delta = \frac{m_1 - m_0}{s} = \frac{75,5 - 75}{0,5} = 1,0$$

(suite de l'exemple § 4.1.1.4 et § 4.1.1.6).

Au lieu ou en plus d'une dérive de la moyenne, il peut y avoir une dérive de la dispersion du processus : c'est pourquoi il est indispensable que chaque carte de contrôle d'une moyenne (cf. § 4.1.1.4) soit accompagnée d'une carte de contrôle de la dispersion (cf. § 4.1.2).

#### 4.1.1.3 Risques décisionnels, périodes opérationnelles moyennes

Quel que soit le type de décision que l'on ait à prendre, statistique ou non, il y a toujours deux risques de se tromper :

- le risque de décider qu'il faut agir alors qu'il ne le faudrait pas (**risque  $\alpha$ , fausse alarme**) ;
- le risque de décider qu'il ne faut pas agir alors qu'il le faudrait (**risque  $\beta$ , risque de ne pas voir que la moyenne a atteint  $m_1$  ou  $m'_1$** ).

Si l'on veut assurer des tolérances, on devra tenir compte de ces deux risques pour la détermination de l'effectif des échantillons. Dans le cas des cartes Shewhart, on peut réellement évaluer les risques  $\alpha$  et  $\beta$ , puisque les échantillons successifs sont traités de façon indépendante les uns des autres ( $\alpha$  et  $\beta$  identiques d'un échantillon à l'autre). Pour les cartes CUSUM et EWMA (§ 4.1.1.5) par contre, où l'on combine les informations présentes avec celles du passé, les risques  $\alpha$  et  $\beta$  évoluent chronologiquement avec les échantillons successifs et ces concepts de risque doivent être traduits en termes de *périodes opérationnelles moyennes* ou *POM*, c'est-à-dire en nombre moyen d'échantillons successifs nécessaires pour que la carte de contrôle dise qu'il y a dérive, soit qu'il y en ait réellement une ( $POM_1$ , concept type  $\beta$ ), soit qu'il n'y en ait pas ( $POM_0$ , concept type  $\alpha$ ). Mais pour les cartes Shewhart, on peut aussi parler de *POM*, ce qui permet, pour un déplacement  $\delta$  et un effectif d'échantillon donnés, de comparer l'efficacité de ces trois types de carte.

Par contre, on peut n'avoir pour seul objectif, dans certains cas, que de vérifier si la moyenne du processus reste stable, sans souci de tolérances : c'est d'ailleurs dans cet esprit que Shewhart a proposé sa méthode de contrôle en 1931 : on ne tient compte alors que du risque  $\alpha$ , et l'effectif des échantillons est indéterminé.

On exposera les deux points de vue, bien que, le plus souvent, il y ait des tolérances à respecter, soit données par le client, soit données par la concurrence.

**4.1.1.4 Cartes de Shewhart (n'assurant pas les tolérances) et cartes de type Shewhart (assurant les tolérances) (cf. norme AFNOR X 06-031.1)**

Un échantillon, constitué de  $n$  valeurs prélevées dans la fabrication en cours, donne respectivement des estimations  $\bar{x}$  et  $s$  de la tendance centrale réelle  $\mu$  et de la dispersion réelle  $\sigma$  actuelles du processus. Ces estimations, même si la fabrication ne s'est pas déréglée, varient d'un échantillon à l'autre : ce sont des variables aléatoires dont on peut calculer les lois de probabilité et donc des intervalles, dépendant de  $n$ , à l'extérieur desquels on a une très faible probabilité de trouver chacun de ces deux paramètres si le processus ne s'est pas déréglé. Les bornes de ces intervalles sont les **limites de contrôle** ( $L_{ci}$  et  $L_{cs}$ ).

Le processus étant centré, si la caractéristique considérée a une distribution normale ( $m, s$ ), la distribution des valeurs des échantillons suit une loi normale ( $m, s/\sqrt{n}$ ). Si l'on place les limites de contrôle des échantillons à plus ou moins 3 écarts-types de la moyenne ( $m \pm 3s/\sqrt{n}$ ), cela voudra dire que l'on n'a qu'une probabilité  $\alpha = 2 \times 0,135 \% = 0,27 \%$  (cf. loi normale réduite) de trouver des valeurs à l'extérieur (figure 4). Cette probabilité  $\alpha$  étant très faible, si l'on trouve des valeurs extérieures, on en conclura que le processus s'est très probablement déréglé et qu'il faut donc le régler.

La **carte de contrôle** (figure 5) est un diagramme, centré sur  $m_0$  et borné par  $L_{cs}$  et  $L_{ci}$ , sur lequel on reporte les valeurs successives des moyennes d'échantillons.

La probabilité  $\alpha$  est le risque de déréglé le processus en croyant le régler.  $\alpha$  est le plus souvent choisi égal à 0,27 %, ce qui conduit à des limites de contrôle à 3 écarts-types de la valeur cible ; mais, il n'est pas interdit de prendre d'autres valeurs en fonction de la spécificité du procédé, c'est-à-dire de la difficulté qu'il y aura à le régler ultérieurement après un dérèglement inopiné.

On ajoute parfois aux limites de contrôle des **limites de surveillance** ( $L_{si}$  et  $L_{ss}$  ; en anglais *warning limits*) placées à  $m \pm 2s/\sqrt{n}$ , c'est-à-dire bornant 95 % des valeurs.

Les types d'actions que l'on entreprend aux limites de contrôle et de surveillance ne sont pas les mêmes. Dans l'industrie mécanique par exemple, on règle généralement la machine en marche aux limites de surveillance et on arrête la machine pour la remettre en état aux limites de contrôle ; dans le cas d'industries chimiques par contre, principalement pour les procédés continus où l'on ne peut arrêter la production sans gros dommages, on n'agira, pour régler le processus, qu'aux limites de contrôle et, éventuellement, aux limites de surveillance après confirmation sur un nouvel échantillon prélevé immédiatement après. D'autres enfin préfèrent ne donner qu'une seule règle de décision aux opérateurs et ne définissent qu'un seul type de limites comprises entre ( $m \pm 2s/\sqrt{n}$ ) et ( $m \pm 3s/\sqrt{n}$ ), en fonction du risque  $\alpha$  choisi.

**■ Cartes de Shewart**

Arrivé à ce niveau, si l'on prend  $n$  quelconque, on aura défini une carte de Shewhart. Cette carte n'a d'intérêt que si l'on se limite à découvrir des causes de dérive d'un processus sans tenir compte des tolérances promises au client (cela suppose donc un contrôle *a posteriori* complémentaire) : on contrôle simplement que le processus ne se dérègle pas. Or, souvent, il est indifférent au producteur que la machine se dérègle légèrement à condition que les produits fournis restent dans les tolérances et, inversement, le producteur tient à être alerté dès qu'un dérèglement peut engendrer un non-respect de la qualité convenue.

**■ Cartes de type Shewhart**

Pour faire intervenir les tolérances, il suffit de déterminer le déplacement limite  $\delta$  de la moyenne qu'il faudra déceler (cf. § 4.1.1.2) et de tenir compte du risque  $\beta$  (souvent entre 5 et 15 % et au maximum 20 %) de ne pas déceler ce dérèglement. Les courbes d'efficacité (figure 6) permettent, ayant choisi  $\beta$ , de déterminer l'effectif  $n$  des échantillons.

On peut calculer ce faisceau de courbes pour n'importe quel risque  $\alpha$  en raisonnant à partir de la figure 7.

Le déplacement  $\delta$  de la moyenne peut être scindé en :

$$\delta = \frac{L_{cs} - m_0}{s} + \frac{m_1 - L_{cs}}{s} = \frac{u_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}}{s} + \frac{u_{\beta} \cdot s/\sqrt{n}}{s} = \frac{u_{\alpha/2} + u_{\beta}}{\sqrt{n}}$$

où  $u_{\alpha/2}$  et  $u_{\beta}$  sont respectivement les nombres d'écarts-types liés aux risques  $\alpha/2$  et  $\beta$  pour une distribution normale des échantillons (cf. loi normale réduite).

D'où :

$$\delta \cdot \sqrt{n} = u_{\alpha/2} + u_{\beta} \tag{11}$$

L'équation ci-dessus montre que, pour un déplacement  $\delta$  de la moyenne que l'on veut détecter, les risques  $\alpha$  et  $\beta$  étant choisis, l'effectif des échantillons ne peut être pris arbitrairement si l'on veut assurer les tolérances ; inversement, avec un effectif quelconque d'échantillon on fera très probablement ou du *sous-contrôle* n'assurant pas les tolérances (réclamations « assurées »), ou du *sur-contrôle* (coût de contrôle prohibitif).

Les limites de contrôle d'une carte de type Shewhart assurant les tolérances sont :

$$L_c = m_0 \pm u_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$$

avec généralement  $u_{\alpha/2} = 3,0$ .

**Exemple du § 4.1.1.2 avec  $\delta = 1$**

Les courbes d'efficacité (figure 6) montrent (par interpolation) qu'avec une carte de type Shewhart, il faut prendre des échantillons d'effectif  $n = 14$  pour n'avoir pas plus de 20 % de risque de ne pas déceler cette dérive. Avec une carte de Shewhart utilisant fréquemment et *a priori* des échantillons de taille  $n = 5$ , on a 80 % de risque de ne pas détecter cette dérive !

On obtient évidemment les mêmes résultats avec l'équation générale [11] :

$$\alpha/2 = 0,135 \% \Rightarrow u_{\alpha/2} = 3,0$$

et  $\beta = 20 \% \Rightarrow u_{\beta} = 0,84$

$$\sqrt{n} = \frac{3,0 + 0,84}{1} = 3,84$$

et  $n \approx 14$

En posant par contre  $n = 5$  *a priori* :

$$u_{\beta} = 1 \times \sqrt{5} - 3,0 = -0,764$$

et  $\beta \approx 78 \%$

(suite de l'exemple § 4.1.1.6).

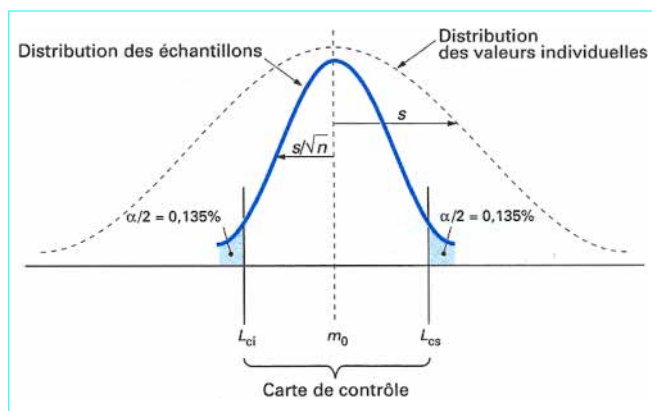
Pour les cartes de type Shewhart, on peut aussi parler de risques en termes de période opérationnelle moyenne ( $POM_0$  pour  $\delta = 0$  et  $POM_1$  pour  $\delta$  quelconque ; cf. § 4.1.1.3) : ceci permet de comparer les efficacités de ces cartes avec celles des cartes CUSUM et EWMA (cf. § 4.1.1.5) où seule cette notion de période opérationnelle moyenne est applicable. Le tableau 2 donne les  $POM_1$  et  $u_{\alpha/2}$  (ce qui permet de calculer les limites de contrôle) pour  $\delta \cdot \sqrt{n}$  et  $POM_0$  donnés.

**Exemple d'utilisation du tableau 2**

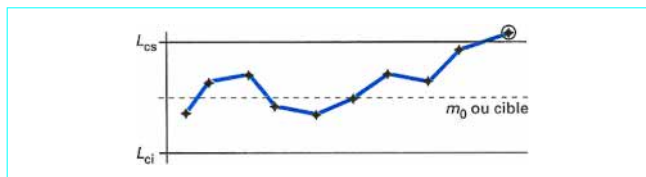
Pour une  $POM_0 = 370$ , avec  $n = 1$ , on détectera en moyenne un dérèglement de  $\delta = 1$  au bout de 44 échantillons successifs ( $\delta \cdot \sqrt{n} = 1$ ), alors qu'avec des échantillons de taille 4, on mettra en évidence cette dérive en 6,3 échantillons seulement ( $\delta \cdot \sqrt{n} = 2$ ) et avec  $n = 9$  ( $\delta \cdot \sqrt{n} = 3$ ) en 2 échantillons.

**Tableau 2 – Périodes opérationnelles moyennes pour une carte de type Shewhart**

$\delta \cdot \sqrt{n}$	Valeur de la POM			
0	$POM_0 = 100$ $u_{\alpha/2} = 2,576$	$POM_0 = 370$ $u_{\alpha/2} = 3,00$	$POM_0 = 500$ $u_{\alpha/2} = 3,09$	$POM_0 = 1\ 000$ $u_{\alpha/2} = 3,29$
0,5	$POM_1 = 50$	$POM_1 = 155$	$POM_1 = 201$	$POM_1 = 369$
0,75	$POM_1 = 29,1$	$POM_1 = 81$	$POM_1 = 103$	$POM_1 = 180$
1,0	$POM_1 = 17,3$	$POM_1 = 44$	$POM_1 = 55$	$POM_1 = 91$
1,5	$POM_1 = 7,1$	$POM_1 = 15,0$	$POM_1 = 18,0$	$POM_1 = 27,2$
2,0	$POM_1 = 3,5$	$POM_1 = 6,3$	$POM_1 = 7,25$	$POM_1 = 10,1$
2,5	$POM_1 = 2,13$	$POM_1 = 3,24$	$POM_1 = 3,60$	$POM_1 = 4,66$
3,0	$POM_1 = 1,50$	$POM_1 = 2,00$	$POM_1 = 2,15$	$POM_1 = 2,59$
3,5	$POM_1 = 1,21$	$POM_1 = 1,45$	$POM_1 = 1,52$	$POM_1 = 1,71$
4,0	$POM_1 = 1,08$	$POM_1 = 1,19$	$POM_1 = 1,22$	$POM_1 = 1,31$



**Figure 4 – Risque  $\alpha$**



**Figure 5 – Carte de contrôle**

**4.1.1.5 Cartes tenant compte des résultats antérieurs : CUSUM et EWMA**

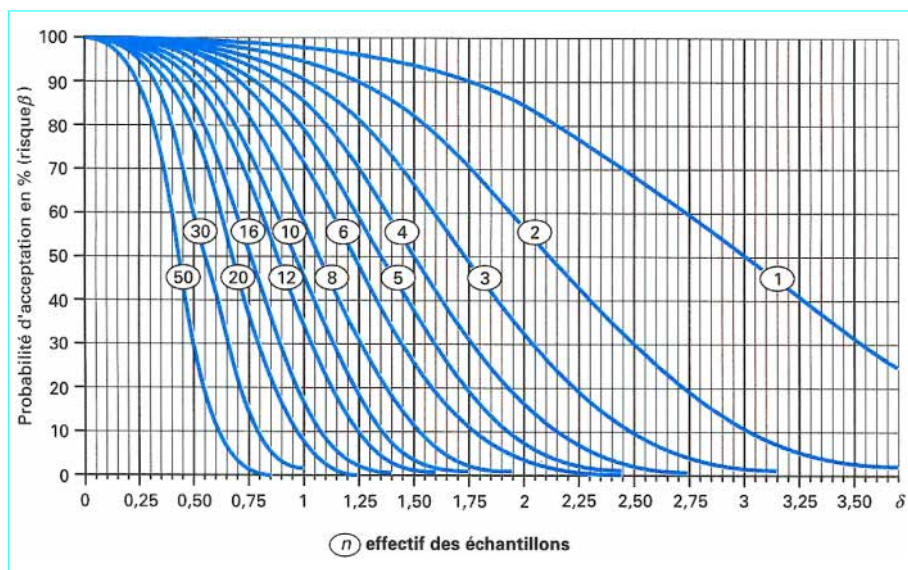
Dans les procédés continus, et de façon générale dans les procédés à forte productivité, on a intérêt à détecter le plus rapidement possible de faibles dérives des caractéristiques des produits ou des paramètres de marche. Les cartes Shewhart permettent de détecter rapidement des dérèglages de grande amplitude mais pas des dérèglages de petite et moyenne amplitude, sinon en accroissant très fortement l'effectif des échantillons, c'est-à-dire le coût de contrôle.

Pour tenter d'améliorer la médiocre efficacité des cartes Shewhart pour les petites dérives, sans accroître le coût de contrôle de façon prohibitive, on a proposé d'ajouter à ces cartes des « règles de séries » (cf. norme AFNOR X 06-031.1) : le principe est de détecter une dérive, même si le dernier échantillon est dans les limites de contrôle, à partir de la configuration de la position des  $p$  derniers points sur la carte. Mais ces règles provoquent une hausse importante des fausses alarmes, elles sont souvent interprétées de façons différentes par les opérateurs, et leur efficacité n'est pas très bonne.

On préfère donc utiliser, pour déceler des dérives lentes et progressives, des cartes plus spécifiques, CUSUM ou EWMA (\*), qui, tenant compte systématiquement du passé, ne mettent en jeu qu'une seule règle de décision et ont une bonne efficacité avec un coût de contrôle modéré. Le principe de ces cartes est que, si à un instant donné la valeur moyenne d'un échantillon n'est pas significativement différente de celle de la cible et n'incite donc pas à une action, la prise en compte systématique des informations fournies par les échantillons précédents peut conduire raisonnablement à une action.

(\*) CUSUM= cartes de sommes cumulées

EWMA = cartes des moyennes mobiles avec pondération exponentielle.



**Figure 6 – Courbes d'efficacité aux mesures (pour  $\alpha = 0,27\%$ )**

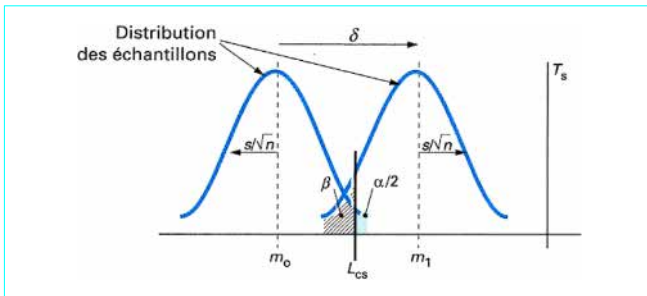


Figure 7 – Déplacement de la moyenne et efficacité

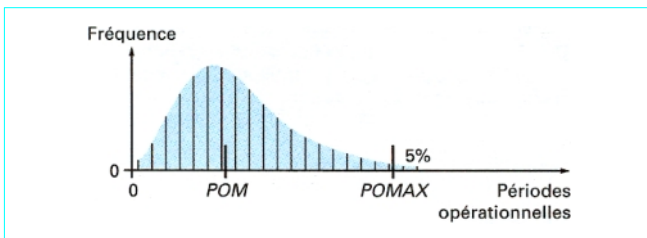


Figure 8 – POM et POMAX pour un dérèglement  $\delta$  donné

**a) Cartes CUSUM** (cf. norme AFNOR X 06-031.4)

Les cartes CUSUM consistent à faire des cumuls algébriques d'écart des valeurs d'échantillons à une référence. À partir des échantillons  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i$  (chacun moyenne de  $n$  résultats individuels successifs), on calcule :

$$\begin{cases} S_i^+ = \max [0; S_{i-1}^+ + (z_i - k)] \\ S_i^- = \min [0; S_{i-1}^- + (z_i + k)] \end{cases}$$

avec  $z_i = \frac{\bar{x}_i - m_0}{s/\sqrt{n}}$ ,

$k \approx \frac{\delta\sqrt{n}}{2}$  (le plus souvent)

On suit donc en fait simultanément deux tracés sur la carte de contrôle, celui des  $S_i^+$  qui reste positif ou nul, et celui des  $S_i^-$  qui reste négatif ou nul.

Le paramètre  $k$  est une « pénalité » que l'on impose de façon à diminuer les fausses alarmes sans pour cela augmenter sensiblement la rapidité de détection des vraies alarmes ; inversement, plus  $k$  est petit plus on décèle de faibles dérives, mais plus on augmente le risque de fausses alarmes.

Les limites de contrôle sont  $L_{CS} = +h$  et  $L_{Ci} = -h$  de part et d'autre de la valeur cible 0.

Les notations en coordonnées centrées réduites utilisées ci-dessus sont celles que l'on rencontre le plus souvent dans les ouvrages de statistique ; elles obligent celui qui remplit la carte à transformer pour chaque point les valeurs successives des  $\bar{x}_i$  en  $\bar{z}_i$ . En fait on peut aussi bien utiliser directement les valeurs réelles  $\bar{x}_i$  plus habituelles et conviviales pour les utilisateurs ; on calculera et on suivra alors :

$$\begin{cases} S_i'^+ = \max [0; S_{i-1}'^+ + (\bar{x}_i - K^+)] \\ S_i'^- = \min [0; S_{i-1}'^- + (\bar{x}_i - K^-)] \end{cases}$$

avec 
$$\begin{cases} K^+ = m_0 + k \frac{s}{\sqrt{n}} \approx \frac{m_0 + m_1}{2} \\ K^- = m_0 - k \frac{s}{\sqrt{n}} \approx \frac{m_0 + m_1}{2} \end{cases}$$

les deux valeurs de  $K$  étant calculées une fois pour toutes. Les limites de contrôle sont alors :

$$L_c = \pm H = \pm \frac{hs}{\sqrt{n}}$$

Contrairement aux cartes Shewhart, l'efficacité d'une carte CUSUM ne peut se juger par les risques  $\alpha$  et  $\beta$ , puisque ceux-ci ne sont pas constants : elle ne peut être estimée que par la période opérationnelle (cf. § 4.1.1.3) pour un dérèglement donné  $\delta$  de la moyenne. La période opérationnelle est une variable aléatoire, non gaussienne, dont on peut déterminer une moyenne (POM), une valeur maximale (POMAX) telle que 95 % des valeurs que l'on peut trouver lui soient inférieures (figure 8).

La  $POM_0$ , correspondant aux fausses alarmes ( $\delta = 0$ ), est en général choisie entre 100 et 1 000 et la  $POM_1$ , correspondant à la rapidité de détection de la dérive maximale  $\delta$  calculée ; est le plus souvent prise inférieure à 4.

$POM$  et  $POMAX$  dépendent évidemment de  $\delta\sqrt{n}$ , mais aussi de  $k$  et des limites de contrôle  $\pm h$  de la carte. Le tableau 3 donne les combinaisons optimales pour obtenir des  $POM_0$  maximales avec des  $POM_1$  minimales.

**Exemple d'utilisation du tableau 3**

Pour une  $POM_0 = 370$ , avec  $k = 0,5$  et  $n = 1$ , on détectera en moyenne un dérèglement de  $\delta = 1$  au bout de 10 échantillons successifs ( $\delta\sqrt{n} = 1$ ), alors qu'avec des échantillons de taille  $n = 4$  ( $\delta\sqrt{n} = 2$ ), on mettra en évidence cette dérive en moyenne en 3,3 échantillons seulement et avec  $n = 9$  ( $\delta\sqrt{n} = 3$ ) en moins de 2 échantillons.

Supposons qu'on veuille au maximum une fausse alarme tous les 500 contrôles ( $POM_0 = 500$ ), et qu'on veuille déceler en moyenne un dérèglement de 1,25 écart-type en moins de 3 échantillons. Dans la colonne  $POM_0 = 500$ , on choisit la valeur de  $POM_1$  la plus proche de 3 (3, 4) d'où :

$$\delta\sqrt{n} = 2$$

et 
$$n = \left(\frac{2}{1,25}\right)^2 = 2,56 \approx 3$$

$$h = 2,665$$

$$k = 1,0$$

La seule règle de décision pour les cartes CUSUM est que, lorsque l'un des cumuls des valeurs d'écart dépasse l'une des limites de contrôle, on agit sur le procédé pour le recentrer et on arrête la carte. On reprend ensuite la carte en la réinitialisant, c'est-à-dire avec  $S_0$  ou  $S'_0 = 0$  : ceci veut dire que l'on ne prend plus en compte les échantillons précédents qui ont été obtenus dans des conditions de réglages différents.

Les cartes CUSUM sont aptes à protéger contre de petites dérives mais sont lentes à détecter des dérives brusques comme le permettent les cartes Shewhart : lorsque, sur un processus, on peut avoir les deux types de dérives, on peut tenir les deux types de cartes simultanément.

Noter enfin que, dans certains cas, on préfère réinitialiser les cartes à  $S_0 = \pm h$  au lieu de 0 lorsque l'on n'est pas sûr d'avoir recentré la caractéristique après un réglage.

**Exemple :** voir § 4.1.1.6.

**b) Cartes EWMA** (cf. norme AFNOR X 06-031.3)

Le principe des cartes EWMA est également de tenir compte des résultats précédents, mais de façon pondérée. À partir des échan-

tillons  $\bar{x}_1, \text{ et } \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i$  (chacun moyenne de  $n$  résultats individuels successifs), on calcule et on suit une grandeur  $Z_i$  telle que :

$$Z_i = \lambda \cdot \bar{x}_i + (1 - \lambda) \cdot Z_{i-1}$$

avec mathématiquement  $0 < \lambda \leq 1$

Le paramètre  $\lambda$  est le coefficient de pondération : si  $\lambda$  est égal à 1, on revient à une carte Shewhart ne tenant compte que du résultat présent et permettant seulement de détecter des dérives importantes ; plus  $\lambda$  est petit, mieux on décèlera de petites dérives, mais moins vite des dérives brusques et importantes. On devra donc choisir  $\lambda$  en fonction de la connaissance du processus : le plus souvent  $0,25 \leq \lambda \leq 0,75$  et assez souvent  $\lambda \approx 0,33$ .

Les limites de contrôle de la variable  $Z_i$  sont :

$$L_c = m_0 \pm \frac{L \cdot s_Z}{\sqrt{n}}$$

avec  $s_Z = s \cdot \sqrt{\lambda / (2 - \lambda)}$ ,

$L \approx 3,0$  (souvent).

En fait  $\sqrt{\lambda / (2 - \lambda)}$  est la limite d'une série  $[\lambda \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{j-1} (1 - \lambda)^{2i}}]_{j \rightarrow \infty}$  : les limites de contrôle sont donc dépendantes du rang de l'échantillon ; mais cette série converge très vite et, pratiquement dès le 4<sup>e</sup> échantillon, les limites de contrôle peuvent être considérées comme des droites parallèles (figure 9) : il faut cependant en tenir compte pour les premiers échantillons lorsque l'on redémarre la carte après une action, si l'on n'est pas sûr d'avoir recentré correctement le processus.

Comme pour les cartes CUSUM, les risques  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas constants et on juge de l'efficacité des cartes EWMA par les périodes opérationnelles moyennes. Le tableau 4 donne les  $POM_0$ ,  $POM_1$  et le coefficient  $L$  optimaux pour différentes valeurs de  $\delta \cdot \sqrt{n}$  et de  $\lambda$ .

**Exemple d'utilisation du tableau 4 :** même principe que le tableau 3.

La seule règle de décision pour les cartes EWMA est que, lorsque la valeur de  $Z_i$  dépasse l'une des limites de contrôle, on agit sur le processus pour le recentrer et on arrête la carte. On reprend ensuite la carte en la réinitialisant c'est-à-dire avec  $Z_0 = m_0$  ou la cible : ceci veut dire que l'on ne tient plus compte des échantillons précédents qui ont été obtenus dans des conditions de réglages différents.

Les cartes EWMA sont faites pour protéger contre de petites dérives mais sont lentes à détecter des dérives brusques comme le permettent les cartes Shewhart : lorsque sur un processus, on peut avoir les deux types de dérives, on peut tenir les deux types de cartes simultanément.

Noter enfin que dans certains cas, comme pour les cartes CUSUM, lorsque l'on n'est pas sûr de recentrer parfaitement le processus, on peut réinitialiser la carte à  $Z_0 = \pm \delta/2$  au lieu de  $Z_0 = m_0$  ce qui conduit, si l'on est bien recentré, à deux tracés rapidement convergents, sinon à une sortie rapide du côté où l'on est décentré.

**Exemple :** voir 4.1.1.6.

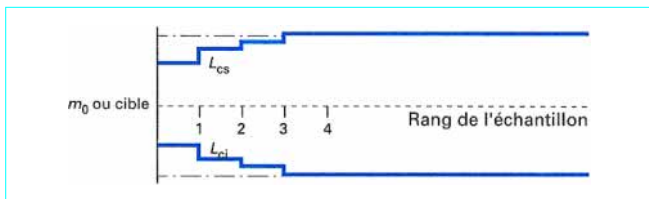


Figure 9 – Limites de contrôle des cartes EWMA

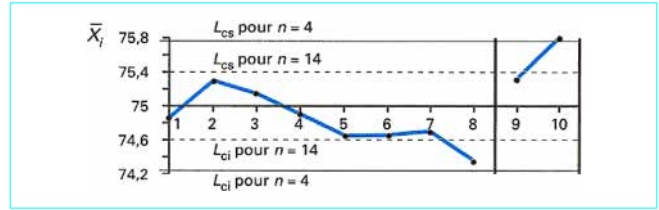


Figure 10 – Carte de contrôle Shewhart

#### 4.1.1.6 Comparaison de l'efficacité des cartes Shewhart, CUSUM et EWMA

Le choix d'un type de carte ne doit pas se faire sur des critères de goût, mais en fonction de ce que l'on veut détecter, des caractéristiques du processus et des moyens de contrôle que l'on peut y consacrer. L'exemple suivant allie volontairement dérive lente et dérive importante et brusque.

**Exemple** des § 4.1.1.2 et 4.1.1.4 avec  $\delta = 1$  (on rappelle que  $s = 0,5$ ,  $T_i = 73$  et  $T_s = 77$  et  $m_0 = 75$ )

Supposons que l'on ait obtenu les deux séries d'échantillons successifs suivants :

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$
74,85	75,30	75,15	74,90	74,65	74,65	74,70	74,35
				$\bar{x}_9$	$\bar{x}_{10}$	$\bar{x}_{11}$	
				75,3	75,8	75,75	

##### ■ Carte de Shewhart

$$n = 4 \\ \alpha/2 = 0,135 \%$$

$$L_c = 75 \pm \frac{3 \times 0,5}{\sqrt{4}} = \begin{cases} 75,75 \\ 74,25 \end{cases}$$

La première série de mesures ne montre aucun décalage significatif (figure 10). La deuxième série de mesures, par contre, décèle un dérèglement important dès le deuxième échantillon.

##### ■ Carte de type Shewhart assurant les tolérances

$$\alpha/2 = 0,135 \%$$

$$\beta = 20 \%$$

d'où

$$n = 14$$

et

$$L_c = 75 \pm \frac{3 \times 0,5}{\sqrt{14}} = \begin{cases} 75,4 \\ 74,6 \end{cases}$$

La première série de mesures montre une dérive de la moyenne au 8<sup>e</sup> échantillon (figure 10), comme avec les cartes CUSUM et EWMA ci-dessous mais avec un coût de contrôle plus que triple (ici  $n = 14$  au lieu de  $n = 4$ ). La deuxième série de mesures décèle un dérèglement important dès le deuxième échantillon.

**■ Carte CUSUM**

On désire  $POM_0 = 500$  et  $POM_1 \approx 3$  ; on trouve dans le tableau 3 :

$$\begin{cases} POM_1 = 3,4 \\ h = 2,665 \text{ et } k = 1,0 \\ \delta\sqrt{n} = 2 \Rightarrow n = 4 \end{cases}$$

ce qui donne en coordonnées réelles :

$$\begin{cases} H = \pm \frac{2,665 \times 0,5}{\sqrt{4}} \approx \pm 0,65 \\ K = 75 \pm \frac{1 \times 0,5}{\sqrt{4}} = \begin{cases} 75,25 = K^+ \\ 74,75 = K^- \end{cases} \end{cases}$$

On obtient le tableau de cumuls ci-dessous, en notant  $\Delta^+ = \bar{x}_i - K^+$  et  $\Delta^- = \bar{x}_i - K^-$  :

$S_i^+$	0	+0,05	0	0	0	0	0	+0,05	+0,60	+1,10	
$\Delta^+$	-0,40	+0,05	-0,10	-0,35	-0,60	-0,60	-0,55	-0,90	+0,05	+0,55	+0,50
$K^+$	75,25										
$\bar{X}_i$	74,85	75,30	75,15	74,90	74,65	74,65	74,70	74,35	75,30	75,80	75,75
$K^-$	74,75										
$\Delta^-$	+0,10	+0,55	+0,40	+0,15	-0,10	-0,10	-0,05	-0,40	+0,55	+1,05	+1,0
$S_i^-$	0	0	0	0	-0,10	-0,20	-0,25	-0,65	0	0	0

La première série de mesures montre une dérive du processus dès le 8<sup>e</sup> échantillon avec  $n = 4$  (figure 11) ; par contre, dans la deuxième série de mesures, la carte CUSUM ne décèle le brusque dérèglement de la moyenne qu'au 3<sup>e</sup> échantillon alors que les cartes Shewhart le détectaient dès le 2<sup>e</sup>.

**■ Carte EWMA**

On désire de même  $POM_0 = 500$  et  $POM_1 \approx 3$  ; on trouve dans le tableau 4 :

$$\begin{cases} POM_1 = 3,5 \\ \lambda = 0,37 \text{ et } L = 3,05 \\ \delta\sqrt{n} = 2 \Rightarrow n = 4 \end{cases}$$

$$L_c = 75 \pm \frac{3,05 \times 0,5 \sqrt{0,37/(2-0,37)}}{\sqrt{4}} = \begin{cases} 75,36 = L_{cs} \\ 74,64 = L_{ci} \end{cases}$$

Tableau des valeurs pondérées  $Z_i = 0,37 \bar{x}_i + 0,63 Z_{i-1}$  avec  $Z_0 = 75$  :

$\bar{x}_i$	74,85	75,30	75,15	74,90	74,65	74,65	74,70	74,35	75,30	75,80	75,75
$Z_i$	74,94	75,08	75,10	75,03	74,89	74,80	74,76	74,59	75,11	75,35	75,44

La carte EWMA (figure 12) répond aux deux types de dérive de la même façon que la carte CUSUM.

Cet exemple précédent permet de résumer dans le tableau 5 les caractéristiques principales des trois types de cartes.

**4.1.2 Cartes de la dispersion**  
(cf. norme AFNOR X 06-031.1)

Les cartes aux moyennes sont calculées pour une valeur donnée  $s$  de la dispersion. Elles perdent donc tout leur sens si, au lieu ou en plus d'une variation de moyenne, il y a une variation notable de la dispersion. On doit donc contrôler soit l'écart-type  $s_i$  des échantillons successifs, soit leur étendue  $w_i$  (différence entre la plus

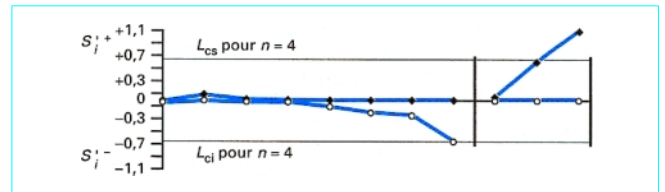


Figure 11 - Carte de contrôle CUSUM

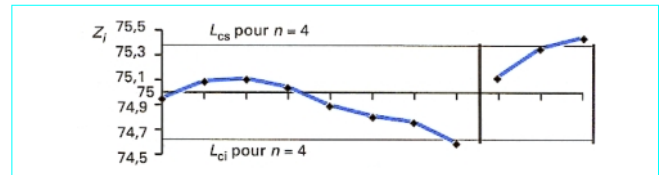


Figure 12 - Carte de contrôle EWMA

grande et la plus petite valeur individuelle ; notée  $R$  en anglais). Le plus souvent, on suit l'écart-type pour des tailles d'échantillon  $n > 10$  et l'étendue ou l'écart-type pour  $n < 10$ .

Le tableaux 6 et 7 donnent les formules et les coefficients dépendant de  $n$  pour calculer la valeur centrale et les limites de contrôle de ces cartes.

**4.2 Cartes de contrôle aux attributs**  
(cf. norme AFNOR X 06-031.2)

Lorsque l'on considère qualitativement les unités produites, c'est-à-dire lorsqu'on les classe en « bonnes » et « mauvaises » (exemples : rayées/non rayées, brillantes/mates, passant dans un calibre ou non, ...), la variabilité est chiffrée par la proportion  $p$  d'unités non conformes, ou le nombre de non-conformités par unité produite : les variables ne sont pas continues, mais **discrètes** (discontinues).

« L'unité produite » peut être une pièce simple (exemple : un boulon) ou complexe (exemple : une automobile) ou une unité convenue (exemples : unité de longueur, de surface, de poids, de temps, ...).

Si une fabrication de  $N$  unités contient en réalité une proportion  $p$  d'unités non conformes, la probabilité de trouver  $k$  unités non conformes dans un échantillon de taille  $n$  est donnée par la loi binominale si  $n < 0,1 N$  (prélèvement considéré comme non exhaustif) :

$$\text{Prob}(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

où  $k$  est une variable aléatoire de moyenne  $np$  et d'écart-type  $\sqrt{np(1-p)}$ .

Cette loi peut dans certains cas être avantageusement remplacée par :

- la loi de Poisson si  $p < 10\%$  et  $n > 50$  ;
- la loi normale si  $np > 18$ , c'est-à-dire si  $n$  est grand et  $p$  n'est pas trop proche de 0.

**Tableau 3 – Périodes opérationnelles moyennes pour une carte CUSUM**

$\delta\sqrt{n}$	Valeur de la POM			
	$POM_0 = 100$	$POM_0 = 370$	$POM_0 = 500$	$POM_0 = 1\ 000$
0	$POM_1 = 19,3$ $h = 5,6 ; k = 0,25$	$POM_1 = 28,8$ $h = 8,01 ; k = 0,25$	$POM_1 = 31,1$ $h = 8,585 ; k = 0,25$	$POM_1 = 36,4$ $h = 9,93 ; k = 0,25$
0,5	$POM_1 = 11,2$ $h = 4,33 ; k = 0,375$	$POM_1 = 15,6$ $h = 6,00 ; k = 0,375$	$POM_1 = 16,6$ $h = 6,39 ; k = 0,375$	$POM_1 = 19,1$ $h = 7,30 ; k = 0,375$
0,75	$POM_1 = 7,40$ $h = 3,502 ; k = 0,5$	$POM_1 = 9,90$ $h = 4,77 ; k = 0,5$	$POM_1 = 10,5$ $h = 5,07 ; k = 0,5$	$POM_1 = 11,9$ $h = 5,758 ; k = 0,5$
1,0	$POM_1 = 4,00$ $h = 2,48 ; k = 0,75$	$POM_1 = 5,20$ $h = 3,34 ; k = 0,75$	$POM_1 = 5,40$ $h = 3,54 ; k = 0,75$	$POM_1 = 6,10$ $h = 4,00 ; k = 0,75$
1,5	$POM_1 = 2,60$ $h = 1,874 ; k = 1$	$POM_1 = 3,30$ $h = 2,516 ; k = 1$	$POM_1 = 3,40$ $h = 2,665 ; k = 1$	$POM_1 = 3,80$ $h = 3,01 ; k = 1$
2,0	$POM_1 = 1,87$ $h = 1,46 ; k = 1,25$	$POM_1 = 2,29$ $h = 1,986 ; k = 1,25$	$POM_1 = 2,39$ $h = 2,105 ; k = 1,25$	$POM_1 = 2,61$ $h = 2,379 ; k = 1,25$
2,5	$POM_1 = 1,44$ $h = 1,132 ; k = 1,5$	$POM_1 = 1,72$ $h = 1,604 ; k = 1,5$	$POM_1 = 1,79$ $h = 1,708 ; k = 1,5$	$POM_1 = 1,95$ $h = 1,943 ; k = 1,5$
3,0	Prendre une carte Shewhart			
4,0	Prendre une carte Shewhart			

**Tableau 4 – Périodes opérationnelles moyennes pour une carte EWMA**

$\delta\sqrt{n}$	Valeur de la POM			
	$POM_0 = 100$	$POM_0 = 370$	$POM_0 = 500$	$POM_0 = 1\ 000$
0	$POM_1 = 17,3$ $\lambda = 0,07 ; L = 2,01$	$POM_1 = 26,5$ $\lambda = 0,06 ; L = 2,55$	$POM_1 = 28,7$ $\lambda = 0,05 ; L = 2,62$	$POM_1 = 34,3$ $\lambda = 0,04 ; L = 2,82$
0,5	$POM_1 = 10,3$ $\lambda = 0,12 ; L = 2,21$	$POM_1 = 14,7$ $\lambda = 0,10 ; L = 2,70$	$POM_1 = 15,8$ $\lambda = 0,09 ; L = 2,79$	$POM_1 = 18,4$ $\lambda = 0,07 ; L = 2,97$
0,75	$POM_1 = 7,0$ $\lambda = 0,19 ; L = 2,35$	$POM_1 = 9,6$ $\lambda = 0,15 ; L = 2,80$	$POM_1 = 10,2$ $\lambda = 0,15 ; L = 2,91$	$POM_1 = 11,7$ $\lambda = 0,13 ; L = 3,11$
1,0	$POM_1 = 3,9$ $\lambda = 0,33 ; L = 2,47$	$POM_1 = 5,2$ $\lambda = 0,26 ; L = 2,90$	$POM_1 = 5,5$ $\lambda = 0,24 ; L = 2,99$	$POM_1 = 6,1$ $\lambda = 0,22 ; L = 3,20$
1,5	$POM_1 = 2,6$ $\lambda = 0,52 ; L = 2,54$	$POM_1 = 3,3$ $\lambda = 0,40 ; L = 2,96$	$POM_1 = 3,5$ $\lambda = 0,37 ; L = 3,05$	$POM_1 = 3,9$ $\lambda = 0,35 ; L = 3,25$
2,0	$POM_1 = 1,89$ $\lambda = 0,66 ; L = 2,56$	$POM_1 = 2,38$ $\lambda = 0,54 ; L = 2,98$	$POM_1 = 2,50$ $\lambda = 0,52 ; L = 3,07$	$POM_1 = 2,76$ $\lambda = 0,46 ; L = 3,27$
2,5	$POM_1 = 1,45$ $\lambda = 0,81 ; L = 2,57$	$POM_1 = 1,78$ $\lambda = 0,70 ; L = 2,99$	$POM_1 = 1,86$ $\lambda = 0,70 ; L = 3,09$	$POM_1 = 2,06$ $\lambda = 0,66 ; L = 3,29$
3,0	Prendre une carte Shewhart			
4,0	Prendre une carte Shewhart			

**Tableau 5 – Caractéristiques des cartes Shewhart, CUSUM et EWMA**

Caractéristiques	Cartes		
	Types Shewhart	CUSUM	EWMA
Représentation vraie de la moyenne	oui	non	presque
Limites de contrôle parallèles	oui	oui	non au début (cf. figure 9)
Éfficacité pour détecter : — de petites dérives ; — des dérives importantes	faible bonne	bonne moyenne	bonne moyenne
Coût de contrôle	élevé	moyen	moyen

**Tableau 6 – Paramètres des cartes de dispersion**

Cartes	Valeur centrale	Limites de contrôle		Limites de surveillance	
		inférieure	supérieure	inférieure	supérieure
$s_i$	$c_4 \cdot s$	$B_5 \cdot s$	$B_6 \cdot s$	$B'_5 \cdot s$	$B'_6 \cdot s$
$w_i$	$d_2 \cdot s$	$D_1 \cdot s$	$D_2 \cdot s$	$D'_1 \cdot s$	$D'_2 \cdot s$

**Tableau 7 – Coefficients pour les cartes de dispersion**

$n$	$c_4$	$B_5$	$B_6$	$B'_5$	$B'_6$	$d_2$	$D_1$	$D_2$	$D'_1$	$D'_2$
2	0,7979	0	2,606	0	2,003	1,128	0	3,686	0	2,834
3	0,8862	0	2,276	0	1,813	1,693	0	4,358	0	3,469
4	0,9213	0	2,088	0,144	1,699	2,059	0	4,698	0,299	3,819
5	0,9400	0	1,964	0,258	1,622	2,326	0	4,918	0,598	4,054
6	0,9515	0,029	1,874	0,336	1,567	2,534	0	5,078	0,838	4,230
7	0,9594	0,113	1,806	0,395	1,523	2,704	0,205	5,203	1,038	4,370
8	0,9650	0,179	1,751	0,441	1,489	2,847	0,387	5,307	1,207	4,487
9	0,9693	0,232	1,707	0,478	1,461	2,970	0,546	5,394	1,354	4,586
10	0,9727	0,276	1,669	0,509	1,437	3,078	0,687	5,469	1,484	4,672
11	0,9754	0,313	1,637	0,535	1,416					
12	0,9776	0,346	1,610	0,557	1,399					
13	0,9794	0,374	1,585	0,576	1,383					
14	0,9810	0,399	1,563	0,593	1,369					
15	0,9823	0,421	1,544	0,608	1,357					
20	0,9869	0,504	1,471	0,664	1,310					
25	0,9896	0,559	1,421	0,702	1,277					

**4.2.1 Référence du processus**

La première étape consiste à estimer la proportion moyenne  $p_0$  d'unités non conformes sur une période de fabrication récente et relativement stable. On estime le plus souvent  $p_0$  à partir de  $r$  échantillons de taille  $n$  quelconque (on conseille  $nr = 300$  à  $400$ ).

On peut aussi estimer le nombre moyen  $u_0$  de non-conformités par unité de production lorsqu'il peut en exister de plusieurs types sur une même unité.

**4.2.2 Efficacité du contrôle aux attributs**

L'efficacité du contrôle aux attributs est faible en regard de celle du contrôle aux mesures que l'on devra toujours lui préférer sauf :

- s'il n'existe aucun mode de contrôle aux mesures ;
- si la mesure est ou trop longue ou trop coûteuse (dans ce dernier cas, bien prendre en compte la différence d'effectifs à contrôler dans chaque cas pour une efficacité égale) ;
- si l'équipement de mesure est trop onéreux (là aussi, bien vérifier la non-rentabilité de l'investissement de cet équipement par rapport à la différence du nombre d'unités à contrôler pour une même efficacité).

On conseille souvent des effectifs  $n > 50$  et même parfois supérieurs à  $100$  : ce n'est possible que pour des contrôles automatisés et rapides, sinon cela revient à faire du contrôle de réception *a posteriori*.

Pour des effectifs d'échantillons faibles, on a une faible probabilité de déceler des dérèglages. On peut calculer cette probabilité  $P$  par la loi binomiale ou utiliser les courbes d'efficacité de la figure 13 :

$P = \text{Prob}(0)$  pour  $L_{cs} = 1$

$P = \text{Prob}(0) + \text{Prob}(1)$  pour  $L_{cs} = 2$

$P = \text{Prob}(0) + \text{Prob}(1) + \text{Prob}(2)$  pour  $L_{cs} = 3$

On peut aussi, comme dans le cas des mesures, faire intervenir la notion de période opérationnelle moyenne (cf. norme AFNOR X 06-031.2).

Dans le cas où l'on n'accepte aucune unité défectueuse dans un échantillon (limite de contrôle  $L_{cs} = 1$ ), la loi binomiale se réduit à :

$P = \text{Prob}(0) = (1 - p)^n$

**Exemple**

On contrôle des échantillons de 5 pièces d'une fabrication et on intervient dès qu'on trouve une pièce hors spécification (limite de contrôle  $L_{cs} = 1$ ).

On acceptera, avec une probabilité  $P = (1 - 0,01)^5 = 0,95$ , c'est-à-dire 95 fois sur 100 une fabrication ayant 1 % de pièces non conformes ( $p = 0,01$ ), et une fois sur 5 ( $P = 0,207$ ) une fabrication ayant 27 % de pièces non conformes ( $p = 0,27$ ) !

Si l'on avait pris  $n = 100$ , on n'accepterait que 13 fois sur 100 ( $P = 0,132$ ) une fabrication ayant 2 % de pièces non conformes (cf. figure 13).

**4.2.3 Cartes de contrôle aux attributs**

On distingue trois types de cartes, chacun comportant deux sous-groupes :

- **carte « p »** pour la proportion d'unités non conformes (échantillons de tailles pouvant être différentes) et **carte « np »** (échantillons de taille pratiquement constante) ;
- **carte « u »** pour le nombre de non-conformités par unité de production et **carte « c »** pour le nombre de non-conformités par échantillon ;
- **carte des « démérites »** où l'on pondère les types de non-conformités en fonction de leur gravité pour le client.

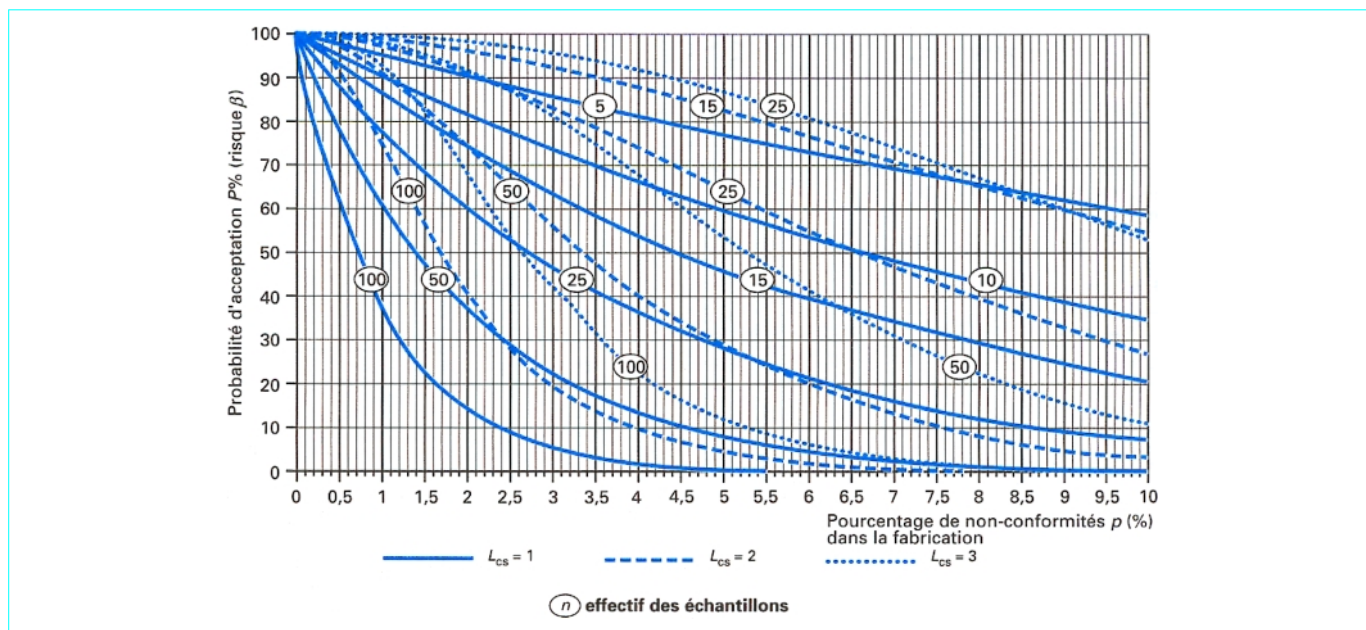


Figure 13 - Courbes d'efficacité aux attributs

4.2.3.1 Carte « p »

La carte de contrôle est un diagramme, centré sur  $p_0$  (proportion moyenne d'unités non conformes) et borné par des limites de contrôle  $L_{cs}$  et  $L_{ci}$ , sur lequel on reporte les proportions  $p_i$  d'unités non conformes trouvées dans les échantillons successifs.

Les limites de contrôle varient d'un échantillon à l'autre si l'effectif  $n_i$  des échantillons contrôlé n'est pas constant :

$$L_c = p_0 \pm 3 \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n_i}}$$

Si l'effectif des échantillons varie peu, les limites de contrôle seront des droites parallèles :

$$L_c = p_0 \pm 3 \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{\bar{n}}}$$

avec  $\bar{n}$  effectif moyen des échantillons.

Si  $p_0$  est petit et  $n$  grand, on fera l'approximation de Poisson et les limites seront :

$$L_c = p_0 \pm 3 \sqrt{\frac{p_0}{n_i \text{ ou } \bar{n}}}$$

Parfois, la valeur de  $L_{ci}$  est négative : dans ce cas, il n'existe pas de limite de contrôle inférieure (même  $p_i=0$  se trouve dans les valeurs attendues).

On peut ajouter des limites de surveillance à  $p_0 \pm 2s$ .

4.2.3.2 Carte « np »

On préfère la carte « np » lorsque la taille  $n$  des échantillons est constante, car les opérateurs n'ont qu'à compter des nombres d'unités non conformes et non à calculer des proportions.

La valeur centrale de la carte est  $np_0$ .

Les limites de contrôle sont constantes :

$$L_c = np_0 \pm 3 \sqrt{np_0(1-p_0)}$$

On peut ajouter des limites de surveillance à  $np_0 \pm 2s$ .

4.2.3.3 Carte « u »

Dans le cas où les unités produites peuvent comporter chacune plusieurs types de non-conformités différentes, on doit utiliser la loi de Poisson car le nombre de non-conformités peut dépasser l'effectif des échantillons.

La valeur centrale de la carte est  $u_0$ .

Les limites de contrôle sont :

$$L_c = u_0 \pm 3 \sqrt{\frac{u_0}{n}}$$

On peut ajouter des limites de surveillance à  $u_0 \pm 2s$ .

4.2.3.4 Carte « c »

Ces cartes sont utilisées également dans le cas où chaque unité peut comporter plusieurs non-conformités, mais où l'on juge de la qualité sur un ensemble de plusieurs unités (un lot).

Sur une période de référence récente et relativement stable, on a déterminé la valeur centrale de la carte  $c_0 = nu_0$ .

Si la taille  $n_i$  des échantillons n'est pas constante, les limites de contrôle sont variables en fonction de chaque échantillon :

$$L_c = \frac{n_i c_0}{n} \pm 3 \sqrt{\frac{n_i c_0}{n}}$$

Si l'effectif des échantillons est relativement constant, les limites de contrôle seront :

$$L_c = c_0 \pm 3 \sqrt{c_0}$$

On peut ajouter des limites de surveillance à  $c_0 \pm 2s$ .

**4.2.3.5 Carte des démerités**

L'objectif de ces cartes est de tenir compte non seulement du nombre ou de la proportion des non-conformités, mais aussi de leur gravité. Le terme de **démérites** que leur ont donné les statisticiens a une résonance négative et péjorative : on aura intérêt à leur trouver un autre nom !

Cette méthode de maîtrise de la qualité s'applique directement aux contrôles par attributs mais peut aussi être utilisée pour des contrôles aux mesures (il suffit par exemple de compter la sortie d'une carte de contrôle aux mesures comme une non-conformité).

Elle peut s'appliquer pour le suivi de la qualité, de la sécurité, de l'environnement, pour des caractéristiques techniques ou dans des secteurs dits « de service » (services comptables, secrétariats, facturations, expéditions, traitement des réclamations, ...).

Le principe est de classer par famille (4 au maximum) les non-conformités trouvées dans un échantillon de  $n$  unités contrôlées en fonction de leur **degré de gravité pour le client**. On sera ainsi amené à loger, dans une même famille, des non-conformités de causes parfois très différentes mais ayant la même incidence chez le client. Toutes les non-conformités correspondant à chaque famille doivent être notées pour chacun des « objets » contrôlés.

On détermine ensuite des coefficients de gravité  $g_i$  tels que  $\sum g_i = 1$  pour chaque famille.

Non-conformités	Familles	Coefficients
critiques	A	$g_a$
majeures	B	$g_b$
mineures	C	$g_c$
légères	D	$g_d$

Le point important est que cette cotation subjective des gravités soit établie par un groupe de personnes concernées à divers titres, et non par une seule personne.

Par définition, le **démérite de la production totale** estimé à partir de l'analyse des  $n$  unités est :

$$D = \frac{\sum (n_i \cdot g_i)}{n} \times 100$$

où  $n_i$  est le nombre de non-conformités observées pour la famille  $I$ .

Si on appelle  $p_i$  le pourcentage de non-conformités de la famille  $I$  :

$$D = \sum (g_i \cdot p_i)$$

Cette dernière expression permet de comparer des démerités de périodes différentes si le nombre d'observation n'est pas constant.

On détermine le démérite de référence à partir des démerités de  $r$  périodes stables :

$$D_0 = \frac{\sum D_i}{r}$$

ou, si l'on appelle  $\bar{p}_i$  le pourcentage moyen de non-conformités d'une famille  $I$  :

$$D_0 = \sum (g_i \cdot \bar{p}_i)$$

Les  $p_i$  suivent une loi de Poisson de moyenne  $\bar{p}_i$  et d'écart-type  $\sqrt{\bar{p}_i}$ , mais non les démerités. On peut cependant calculer un écart-type des démerités :

$$s_d = 10 \sqrt{\sum (g_i^2 \cdot \bar{p}_i) / \bar{n}} \text{ en pourcentage}$$

avec  $\bar{n}$  moyenne des observations réalisées sur les  $r$  périodes.

La **carte de contrôle des démerités** est un diagramme, centré sur  $D_0$  et borné par des limites de contrôle, sur lequel on reportera les valeurs successives des démerités.

Si les  $p_i$  sont de l'ordre de quelques unités, on admet en pratique que la distribution des  $D_i$  n'est pas trop éloignée d'une distribution normale, d'autant que l'on s'intéressera surtout à la limite de contrôle supérieure  $L_{cs}$  :

$$L_{cs} = D_0 + 2 + 3 s_d$$

On peut enfin appliquer aux démerités le tracé pondéré EWMA (cf. § 4.1.1.5), ce qui permet de tempérer les actions et de déceler de plus faibles tendances de dérive (cf. § 4.1.1.5 b).

**4.3 Fréquence d'échantillonnage**  
(cf. norme AFNOR X 06-031.0)

Les statistiques permettent de déterminer rigoureusement la taille des échantillons à contrôler pour détecter une dérive donnée d'un processus avec des risques connus de se tromper dans les décisions, mais ne permettent pas de déterminer à quelle fréquence il faut échantillonner. Toutes les règles actuelles pour estimer cette fréquence font appel à la connaissance et à l'expérience que l'on a du processus.

■ **Le premier, R. Cavé a énoncé une règle simple**, fondée sur la fréquence moyenne des réglages des machines, de façon à obtenir un coût de contrôle minimal pour la **production de grandes séries de pièces mécaniques**, c'est-à-dire de pièces **individualisables**.

Soit  $n$  l'effectif calculé des échantillons, et

$M$  le nombre moyen de pièces produites entre deux réglages ;

la proportion  $q$  de pièces à prélever est :

$$q = \sqrt{\frac{n}{M}}$$

Si, à partir de cette règle, on exprime la fréquence minimale  $F$  en nombre d'échantillons par unité de temps,  $N$  étant le nombre de pièces produites pendant un temps  $t$  et  $R$  étant le nombre moyen de réglages pendant ce même temps  $t$  :

$$F = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{NR}{n}}$$

Le nombre de contrôles unitaires par unité de temps est donc  $nF$ .

Cependant, si l'on associe cette règle avec le principe des cartes de contrôle, on s'aperçoit qu'elle ne peut être appliquée que pour des valeurs élevées de  $N$  et qu'il faut postuler une condition imposant une relation restrictive entre  $N$ ,  $n$  et  $R$ . Cette condition est qu'il faut au minimum  $p$  échantillons entre deux réglages. En effet, si  $p$  est trop petit, on s'apercevra trop tard des dérives du processus (exemple par l'absurde avec  $p = 1$  : tous les points sont à l'extérieur de la carte de contrôle !), et, si  $p$  est trop grand, le coût de contrôle sera élevé, sans pour cela être plus efficace, puisque l'on fera un grand nombre de contrôles pendant des périodes où il ne se passe rien.

Le choix de  $p$  peut être guidé par la période opérationnelle moyenne choisie pour détecter un dérèglement ( $POM_1$ ) : si  $POM_1$  est pris, comme souvent, égal à 2 ou 3, on prendra  $p$  supérieur ou égal à 3 ou 4.

$N$  étant fixé par la capacité de production,  $R$  et  $n$  par la capabilité du processus et sa stabilité à l'état présent,  $p$  étant fonction de la vitesse de dérive du processus entre deux réglages, on ne peut appliquer la règle de R. Cavé que si :

$$N \geq p^2 n R$$

Si l'on sort de cette condition, pour maintenir toujours en moyenne  $p$  échantillons entre deux réglages, il faut une fréquence minimale d'échantillonnage :

$$F = \frac{pR}{t}$$

Enfin, on considère souvent que lorsque  $N < 4nR$ , c'est-à-dire lorsque l'on est amené à contrôler plus des trois quarts d'une production pour  $p = 3$ , il vaut mieux contrôler toute la production et travailler à améliorer la capabilité et la stabilité du processus.

■ Pour des **processus continus** fournissant des produits non individualisables (gaz, liquides, ou solides en vrac), on ne pourra utiliser que cette dernière équation puisque  $N$  est par définition indéterminé. On pourra cependant parfois se fixer par expérience des périodes ou des tonnages fictifs, jugés suffisamment « homogènes » (exemples : 1/2 heure de production, 1 tonne de produit) et qui seront considérés comme des individus : on pourra alors utiliser la règle de R. Cavé si l'on se trouve dans sa condition d'application.

#### Exemples :

■  $N = 10\,000$  rivets/heure

$n = 50$

$R = 2$  réglages/jour en moyenne

$p = 4$

unité de temps = 1 poste de 8 heures

D'où :  $N = 10\,000 \times 24 > p^2 nR = 1\,600$

On applique la règle de R. Cavé :

$$F = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(10\,000 \times 24) \times 2}{50}} \approx 33$$

On contrôlera 33 échantillons de 50 pièces par poste, c'est-à-dire 2,1 % de la production.

■  $N = 4$  préparations chimiques/jour

$n = 3$

$R = 2$  réglages/mois en moyenne

$p = 5$

unité de temps = 1 jour

D'où  $4nR = 24 < N = 120 < p^2 nR = 150$ .

On ne peut appliquer la règle de R. Cavé et :

$$F = \frac{pR}{30} = 0,33$$

On contrôlera 33 % de la production.

■  $N = 30$  véhicules agricoles/mois

$n = 3$

$R = 4$  réglages/mois en moyenne

$p = 4$

unité de temps = 1 jour

D'où :  $N = 30 < 4 nR = 48$ .

On devra contrôler tous les véhicules.

Citons que, dans certaines industries, on utilise pour déterminer la fréquence d'échantillonnage des équations empiriques ou des graphiques tenant compte du nombre moyen de dérèglages mais aussi de leur gravité.

Pour la constitution des échantillons, des prélèvements groupés à un instant donné donnent une image instantanée de la moyenne du procédé, alors que des prélèvements étalés dans le temps donnent une image moyenne de la position de la moyenne du procédé.

De façon générale, si le procédé a des dérives lentes et que la fréquence d'échantillonnage a été correctement évaluée, on préférera des prélèvements étalés qui donnent une image moyenne du

processus ; sur des procédés chimiques continus, par exemple, faire 5 prélèvements en 10 min et les analyser reviendrait à faire une étude de répétabilité de la mesure ! Si le procédé peut avoir des dérives rapides, il sera préférable de faire des prélèvements groupés. Mais, quelle que soit la technique adoptée, elle devra être la même que celle qui a été choisie pour faire la « période de référence » qui a permis d'évaluer ce que sait faire le processus ( $m_0$ ,  $s_0$ ), de façon à comparer des populations dans des conditions identiques.

C'est pourquoi, la première période de référence étant le plus souvent assez imprécise, tant pour la détermination de la statistique ( $m_0$ ,  $s_0$ ) que pour la technique et la fréquence d'échantillonnage, il est obligatoire de refaire périodiquement et d'accorder ces estimations qui sont indissociables.

Enfin, il sera utile d'étudier si la moyenne du paramètre contrôlé n'a pas des variations dues à des facteurs périodiques inconnus, ou connus mais non contrôlables (températures diurnes et nocturnes par exemple), et d'en tenir compte dans la périodicité des prélèvements afin qu'ils ne soient pas en phase.

## 5. Contrôle de réception ou d'acceptation

### 5.1 Généralités

Les méthodes de contrôle de réception s'appliquent à des lots de produits au même stade de fabrication.

Ce contrôle concerne différents aspects de la relation fournisseur-client (ce dernier étant interne ou externe), comme par exemple :

- la réception d'un lot de matières premières qui seront mises en œuvre dans une fabrication ;
- l'acceptation d'unités intermédiaires fabriquées à un stade du processus, avant leur incorporation au cours du stade suivant ;
- l'acceptation d'une fabrication avant expédition ;
- la réception d'une fabrication par le client externe.

Le développement des méthodes MSP de contrôle en cours de fabrication assurant le respect des tolérances, telles qu'elles ont été décrites dans les paragraphes précédents, ainsi que la certification des systèmes qualité, ont permis de diminuer, voire de supprimer (si le processus a une bonne capabilité) le contrôle final. Il est néanmoins indispensable d'en exposer les principes et les méthodes.

■ Le **contrôle à 100 %** n'entre pas, par définition, dans la catégorie des contrôles statistiques : il est d'ailleurs tout à fait exceptionnel et réservé à des situations où, pour des raisons de sécurité, il est nécessaire d'avoir des lots de fabrication rigoureusement indemnes d'unités non conformes. Il convient de préciser que des aléas du contrôle (inattention momentanée des contrôleurs, dérèglages brutaux des systèmes de contrôle, etc.) peuvent conduire à des erreurs qui empêchent d'accorder au contrôle à 100 % une fiabilité complète.

■ Le contrôle de réception est très généralement effectué sur **prélèvements d'échantillons**. Ces prélèvements doivent être pratiqués au hasard, de façon à éliminer les influences systématiques. Le résultat du contrôle conduit à l'application d'une règle de décision, soit l'acceptation du lot, soit son refus (avec dans ce dernier cas une procédure indiquant ce qu'on doit faire des lots refusés). Le contrôle sert aussi à estimer *a posteriori* la qualité d'une fabrication, conduisant éventuellement à modifier soit les conditions des réceptions ultérieures (en renforçant ou au contraire en réduisant le contrôle), soit la fabrication ou le contrôle en cours de fabrication.

Il est très utile de considérer la **courbe d'efficacité du contrôle** (figure 14), qui exprime graphiquement la probabilité  $P$  d'accepter, au vu des résultats du contrôle, un lot contenant une proportion  $p$  d'unités non conformes (hors tolérances).

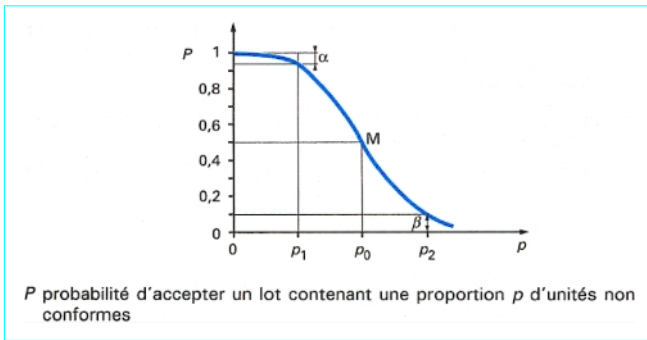


Figure 14 – Courbe d'efficacité du contrôle

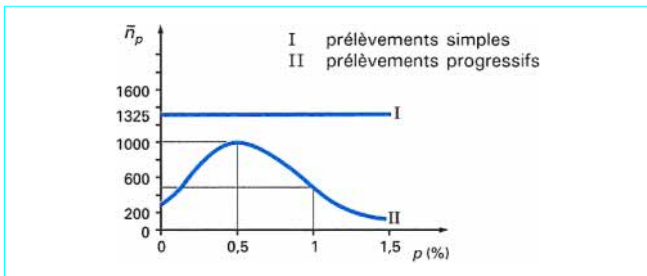


Figure 15 – Nombre moyen  $\bar{n}_p$  de pièces à prélever en fonction du pourcentage  $p$  d'unités non conformes

Deux points de cette courbe ont une grande importance pratique :

- le **risque  $\alpha$  du fournisseur** (souvent 5 % dans ce type de contrôle) de se voir refuser un lot contenant une proportion  $p_1$  d'unités non conformes que le client pourrait accepter ;
- le **risque  $\beta$  du client** (souvent 10 % dans ce type de contrôle) d'accepter un lot contenant une proportion  $p_2$  d'unités non conformes que le client trouvera inacceptable.

**Nota** : ces définitions sont données dans le cas d'un contrôle de réception par un client extérieur ; elles sont faciles à transposer dans d'autres cas de figure.

Les deux points précités permettent de définir le **rapport de discrimination du plan de contrôle**  $DS = p_2/p_1$  : un plan discriminant correspond à une valeur faible de  $DS$ , c'est-à-dire à une courbe peu étalée.

La courbe d'efficacité permet aussi de définir la **qualité moyenne**  $Q_p$  d'une série de lots (*Average Outgoing Quality, ou AOO*), courbe donnant en fonction de  $p$  la proportion moyenne des unités non conformes contenues dans les lots soumis au contrôle, dans l'hypothèse où les lots refusés au vu du contrôle sont triés à 100 % et transformés en lots entièrement conformes.

Cette courbe  $Q_p(p)$  présente un maximum  $Q_\ell$  appelé **qualité moyenne limitée** (*Average Outgoing Quality Limit, ou AOQL* ; en français, LQMAC, Limite de Qualité Moyenne Après Contrôle).

On peut choisir entre différents modes de prélèvement :

- **prélèvement simple** (un seul échantillon d'effectif  $n$ ) ;
- **prélèvements doubles** (deux échantillons successifs d'effectifs  $n_1$  et  $n_2$ ) ; le contrôle du premier conduit aux décisions d'accepter le lot ou de le refuser, ou de prélever le second échantillon ; dans ce dernier cas, les résultats combinés des deux contrôles conduisent à accepter ou à refuser le lot ;
- **prélèvements multiples**, généralisation du cas précédent ;
- **prélèvements progressifs**, où l'effectif d'échantillon  $n$  n'est pas fixé à l'avance et dont les règles d'acceptation, de refus ou de continuation du contrôle s'appliquent successivement à chaque unité contrôlée.

Pour une même efficacité, le **coût moyen** du contrôle diminue quand on complique le mode de prélèvement, car le nombre moyen d'unités prélevées diminue lorsqu'on passe du simple au double, au multiple, au progressif (figure 15).

Selon que le contrôle porte sur des caractéristiques qualitatives ou quantitatives, on distinguera **contrôle aux attributs** (proportion d'unités non conformes ou nombre moyen de caractères non conformes par unité) et **contrôle aux mesures** (proportion de valeurs mesurées non conformes).

Ces méthodes sont détaillées ci-après.

## 5.2 Contrôle de réception aux attributs

### 5.2.1 Choix d'un plan d'échantillonnage

Le problème est essentiellement de déterminer les caractéristiques du plan de contrôle (effectif d'échantillon, risques, règles de décision). Ces caractéristiques étant liées entre elles, on ne dispose pas de la liberté de les choisir toutes arbitrairement.

Il y a lieu de faire une distinction entre :

- des lots isolés ou en petit nombre ;
- des séries continues de lots en provenance du même fabricant (en particulier, soi-même s'il s'agit d'un contrôle avant expédition).

### 5.2.2 Lots isolés ou en petit nombre

#### 5.2.2.1 Détermination d'un plan d'échantillonnage à partir des risques client et fournisseur

##### 5.2.2.1.1 Prélèvements simples

On effectue un prélèvement d'effectif  $n$  constant et l'on accepte le lot si le nombre  $k$  de non-conformes est inférieur ou égal à un nombre  $c$ .

Lorsque le prélèvement peut être considéré comme non exhaustif, c'est-à-dire pratiquement si l'effectif d'échantillon  $n$  est au plus égal au 1/10 de l'effectif  $N$  du lot, la probabilité  $P$  d'accepter, au vu du contrôle, un lot contenant une proportion  $p$  de non-conformes est donnée par la loi binominale :

$$P = \sum_{k=0}^{c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Par exemple, si  $c = 0$  (aucune unité non conforme), on a :

$$P = (1-p)^n$$

ou encore, si  $c = 1$  (zéro ou une unité non conforme), on a :

$$P = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$$

Le problème est ici de déterminer  $n$  et  $c$  connaissant les couples  $(\alpha, p_1)$  et  $(\beta, p_2)$ , c'est-à-dire de résoudre le système d'équations en  $n$  et  $c$  :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{c} C_n^k p_1^k (1-p_1)^{n-k} = 1 - \alpha \\ \sum_{k=0}^{c} C_n^k p_2^k (1-p_2)^{n-k} = \beta \end{cases}$$

La norme AFNOR X 06-026 comporte une table permettant de déterminer  $n$  et  $c$  pour  $\alpha = 5\%$  et  $\beta = 10\%$  et diverses valeurs du rapport de discrimination  $DS$  : une annexe donne les formules permettant de traiter le cas de valeurs différentes des risques.

**5.2.2.1.2 Prélèvements doubles**

Un premier échantillon d'effectif  $n_1$  contient un nombre  $k_1$  de non-conformes et donne lieu à l'une des décisions suivantes :

- $k_1 \leq c_1$  : acceptation du lot ;
- $k_1 \geq c_1'$  : refus du lot ;
- $c_1 < k_1 < c_1'$  : prélèvement d'un deuxième échantillon d'effectif  $n_2$ .

Dans ce dernier cas, si le nombre total  $k$  de non-conformes dans les deux échantillons est inférieur ou égal à une limite  $c_2$ , le lot est accepté.

L'effectif prélevé est donc une variable aléatoire pouvant prendre les deux valeurs  $n_1$  et  $(n_1 + n_2)$ , et dont la valeur moyenne est fonction de la proportion réelle  $p$  de non-conformes.

La solution générale du calcul des effectifs  $n_1$  et  $n_2$ , et des règles de décision ( $c_1$ ,  $c_1'$  et  $c_2$ ), connaissant les couples  $(\alpha, p_1)$  et  $(\beta, p_2)$  est indéterminée.

Cependant, la norme X 06-026 comporte une table donnant les règles de décision dans le cas particulier où les effectifs des deux échantillons sont tous deux égaux à  $0,6 n$ ,  $n$  étant l'effectif du prélèvement simple correspondant aux mêmes risques. L'efficacité du plan double est alors sensiblement égale à celle du plan simple, et son coût est moindre, en raison de l'abaissement du nombre moyen d'unités à contrôler avant de pouvoir décider.

**5.2.2.1.3 Prélèvements progressifs**

La théorie des prélèvements progressifs a été développée en 1945 par **A. Wald** (USA). Leur intérêt réside dans le fait que, pour des courbes d'efficacité équivalentes, le nombre de prélèvements est en moyenne beaucoup plus faible que pour les autres types de prélèvements, d'où des économies de temps et d'argent souvent considérables, surtout si le coût unitaire d'un essai est élevé, ce qui est souvent le cas dans certains secteurs (chimie, biochimie, etc.).

L'idée de base de cette théorie est d'effectuer des prélèvements successifs d'une unité et de faire un « test d'hypothèse » en adoptant comme hypothèse  $H_1$  le fait que la proportion de non-conformes dans le lot est  $p_1$ , correspondant au risque du fournisseur  $\alpha$ , et comme contre-hypothèse  $H_2$  le fait que la proportion de non-conformes dans le lot est  $p_2$ , correspondant au risque  $\beta$  du client.

À chaque prélèvement, la fonction soumise au test est le rapport  $P_{2,n}/P_{1,n}$  de la probabilité d'avoir obtenu l'ensemble des valeurs observées depuis le premier prélèvement dans l'hypothèse  $H_2$ , à la probabilité analogue dans l'hypothèse  $H_1$ . Si le risque d'accepter  $H_2$  quand c'est l'hypothèse  $H_1$  qui est exacte est  $\alpha$ , et inversement si le risque d'accepter  $H_1$  quand c'est l'hypothèse  $H_2$  qui est exacte est  $\beta$ , **Wald a montré qu'il faut appliquer les règles suivantes** :

- si l'on trouve constamment, du 1<sup>er</sup> au  $n^e$  prélèvement :

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{P_{2,n}}{P_{1,n}} < \frac{1-\beta}{\alpha}$$

- on effectue un  $(n + 1)^e$  prélèvement d'une unité ;
- si le rapport est supérieur à la limite supérieure de l'intervalle ci-dessus, on arrête les prélèvements et on refuse le lot ;
- si le rapport est inférieur à la limite inférieure de cet intervalle, on arrête les prélèvements et on accepte le lot.

La théorie complète donne les équations de la courbe d'efficacité ainsi que le nombre moyen  $\bar{n}_p$  d'unités prélevées avant la décision d'acceptation ou de refus ; ce nombre peut cependant être élevé dans le cas où c'est une hypothèse intermédiaire entre  $H_1$  et  $H_2$  qui est exacte ; on peut compléter les règles par une règle de troncage si l'on vient à atteindre un nombre total de prélèvements égal à une valeur fixée à l'avance.

Dans le cas du contrôle aux attributs, les probabilités d'obtenir  $k$  unités non conformes parmi les  $n$  prélevées sont respectivement :

$$P_{1,n} = p_1^k (1 - p_1)^{n-k} \quad \text{si } p = p_1 \text{ (hypothèse } H_1)$$

$$P_{2,n} = p_2^k (1 - p_2)^{n-k} \quad \text{si } p = p_2 \text{ (hypothèse } H_2)$$

La comparaison du rapport des probabilités aux limites indiquées ci-dessus permet d'énoncer les règles suivantes,  $k$  étant le nombre d'unités non conformes compté depuis la 1<sup>re</sup> unité,  $a_n$  et  $r_n$  étant les expressions suivantes, toutes deux fonctions linéaires de  $n$  :

$$a_n = \frac{\lg \frac{\beta}{1-\alpha} + n \lg \frac{1-p_1}{1-p_2}}{\lg \frac{p_2}{p_1} + \lg \frac{1-p_1}{1-p_2}} = -h_1 + sn$$

$$r_n = \frac{\lg \frac{1-\beta}{\alpha} + n \lg \frac{1-p_1}{1-p_2}}{\lg \frac{p_2}{p_1} + \lg \frac{1-p_1}{1-p_2}} = h_2 + sn$$

(lg désignant le logarithme décimal) ;

- prélever une nouvelle unité si  $k$  se trouve entre  $a_n$  et  $r_n$  ;
- refuser le lot dès que  $k$  est supérieur à  $r_n$  ;
- accepter le lot dès que  $k$  est inférieur à  $a_n$ .

La forme linéaire en  $n$  des expressions de  $a_n$  et  $r_n$  permet une exécution graphique très simple du contrôle : partant de l'origine, chaque prélèvement donne lieu à l'inscription d'un point sur le graphique (figure 16) : tant que le point reste dans la zone (2), on continue les prélèvements ; on arrête et on conclut à l'acceptation dès que le point atteint la zone (1), ou au refus dès que le point atteint la zone (3).

Le nombre moyen d'unités prélevées est donné par :

$$\bar{n}_p = \frac{(h_1 + h_2) P - h_2}{s - p}$$

$P$  étant la probabilité d'accepter un lot contenant une proportion  $p$  d'unités non conformes.

Le tableau 8 donne, pour cinq valeurs de  $p$ , les valeurs de  $P$  et de  $\bar{n}_p$ .

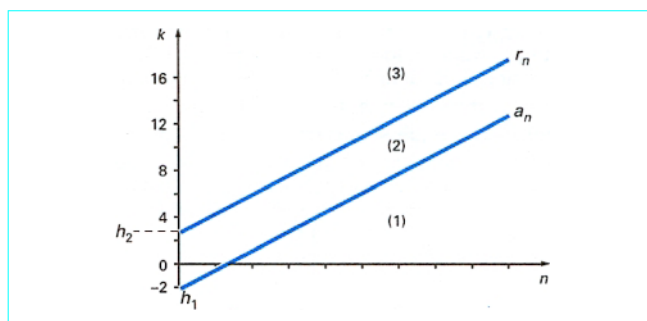


Figure 16 – Prélèvements progressifs

5.2.2.1.4 Exemples

Supposons qu'on fixe à 5 % le risque  $\alpha$  (fournisseur) de refuser des lots contenant la proportion  $p_1 = 0,3$  % d'unités non conformes et à 10 % le risque  $\beta$  (client) d'accepter des lots contenant la proportion  $p_2 = 0,9$  % de non-conformes.

Le rapport de discrimination  $DS$  est donc égal à  $p_2/p_1 = 3$ .

■ Prélèvement simple

La table de la norme X 06-026 montre qu'il faut prélever :

$$n = 1\ 330 \text{ unités}$$

et refuser les lots si l'on trouve parmi ces 1 330 unités plus de :

$$c = 7 \text{ unités non conformes.}$$

■ Prélèvements progressifs

L'application des formules données ci-dessus donne :

$$a_n = -2,038 + 0,005\ 464\ n$$

$$r_n = 2,616 + 0,005\ 464\ n$$

(La précision avec laquelle sont donnés ces coefficients est surabondante pour le tracé des droites du graphique, mais nécessaire pour le calcul des points de la courbe d'efficacité et du nombre moyen d'unités prélevées).

Le tableau 9 donne les ordonnées principales de la courbe d'efficacité du contrôle progressif et les nombres moyens d'unités prélevées avant décision.

Ce tableau et la figure 17 montrent l'intérêt de recourir à la méthode des prélèvements progressifs.

5.2.2.2 Détermination d'un plan d'échantillonnage à partir de l'effectif d'échantillon et de l'un des points de risque

Il arrive fréquemment, dans la pratique industrielle, que pour des raisons économiques on soit obligé de fixer à l'avance l'effectif d'échantillon à une valeur acceptable du point de vue du coût du contrôle.

Dans ce cas, on ne peut fixer arbitrairement l'ensemble des deux points de risque fournisseur et client : on ne peut en fixer qu'un seul.

Les caractéristiques des plans simples correspondants (valeur du point de risque non fixé à l'avance et règles de décision) sont données dans des tables de la norme X 06-026, pour les valeurs de risque  $\alpha = 5\%$  ou  $\beta = 10\%$  ; une table concerne le contrôle de la proportion d'unités non conformes, une autre celui du nombre de non-conformités par unité. Une annexe contient les formules permettant de traiter le cas des valeurs différentes des risques.

5.2.3 Séries continues de lots

Dans le cas de séries continues de lots en provenance du même fabricant, une méthode a été mise au point par les services militaires américains (1942) dans le cadre des Military Standards (MIL STD) ; ces normes ont été reprises ultérieurement par l'ISO et l'AFNOR. L'intérêt principal de cette méthode est de permettre d'utiliser, par un processus simple, l'historique des réceptions précédentes pour passer d'un contrôle dit « normal » à un **contrôle dit « réduit »** ou au contraire à un **contrôle dit « renforcé »** : ainsi, le bon fournisseur est favorisé, le mauvais fournisseur est pénalisé, tandis que le client est protégé, sans avoir davantage de contrôles à faire dans le cas du mauvais fournisseur.

La notion de base de cette méthode est le **niveau de qualité acceptable moyen (NOA, en anglais AQL)**. Le NOA est le pourcentage d'unités non conformes (ou le nombre moyen de non-conformités par unité) que le client peut accepter en moyenne sur des lots successifs.

La norme AFNOR pour le contrôle par attributs porte la référence X 06-022 ; elle est techniquement conforme à la norme ISO 2859, qu'elle améliore sur certains points, notamment en rendant plus commode l'usage des tables.

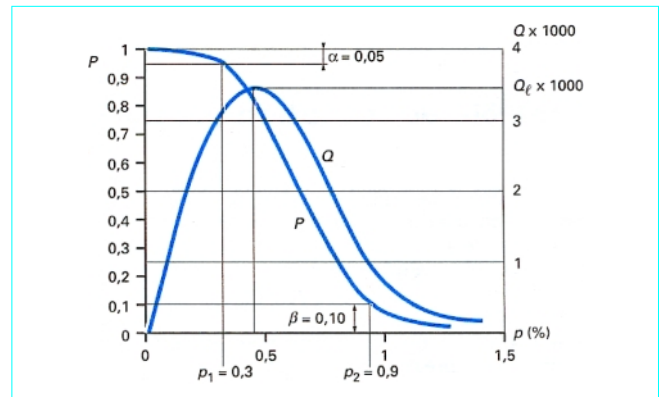


Figure 17 – Exemple de courbe d'efficacité P et de courbe de qualité moyenne Q

Tableau 8 – Valeurs de $P, Q_p, \bar{n}_p$ pour cinq valeurs principales de la proportion $p$ de pièces non conformes					
$p$	0	$p_1$	$s$	$p_2$	1
$P$	1	$1 - \alpha$	$\frac{h_2}{h_1 + h_2}$	$\beta$	0
$Q_p$	0	$(1 - \alpha) p_1$	$\frac{s h_2}{h_1 + h_2}$	$\beta p_2$	0
$\bar{n}_p$	$n_0 = \frac{h_1}{s}$	$\bar{n}_{p1} = \frac{h_1 (1 - \alpha) - \alpha h_2}{s - p_1}$	$\bar{n}_s = \frac{h_1 h_2}{s (1 - s)}$	$\bar{n}_{p2} = \frac{(1 - \beta) h_2 - h_1 \beta}{p_2 - s}$	$n_1 = \frac{h_2}{1 - s}$

Les tables de ces normes sont fondées sur des valeurs de risques  $\alpha = 5\%$  et  $\beta = 10\%$ . Elles permettent de déterminer toutes les caractéristiques des plans de contrôle (simples, doubles et multiples) et en particulier les règles de décision, dans plusieurs situations de choix préalables de certaines de ces caractéristiques :

- choix de l'effectif des lots, du niveau de contrôle, du NQA ;
- choix de l'effectif d'échantillon, du NQA ;
- choix de l'effectif d'échantillon, de  $p_1$  (correspondant à  $\alpha = 5\%$ ) ;
- choix de l'effectif des lots, du niveau de contrôle, du LQMAC (en anglais AOQL) ;
- choix de l'effectif d'échantillon, du LQMAC.

Lorsque l'effectif des lots figure parmi les paramètres choisis à l'avance, les effectifs d'échantillon croissent avec cet effectif, mais pas d'une façon proportionnelle.

Les tables donnent, en fonction des paramètres qui ont été choisis à l'avance, suivant les cas énumérés ci-dessus, les règles de décision et les autres caractéristiques du plan, notamment celles concernant les courbes d'efficacité.

La norme précise, par ailleurs, les règles qui permettent de passer du contrôle normal à un contrôle renforcé qui garantit davantage le client sans le pénaliser sur le nombre des contrôles à effectuer : le contrôle renforcé doit être instauré dès que 2 lots sur 5 consécutifs soumis au contrôle normal ont été rejetés. Des règles analogues, traduisant au contraire une amélioration de la qualité, permettent de revenir au contrôle normal. D'autre part, le passage du contrôle normal au contrôle réduit (effectif plus petit) est à la discrétion du client dès que des règles traduisant une régularité de la qualité ont été satisfaites.

Proportion de pièces non conformes $p$ (%)	Courbe d'efficacité $P$	Nombre moyen de pièces prélevées $\bar{n}_p$	Qualité moyenne des lots $Q_p$ (%)
0	1	373	0
$p_1 = 0,3$	$1 - \alpha = 0,95$	733	0,285
$s = 0,546$	0,565	981	0,308
$p_2 = 0,9$	$\beta = 0,10$	608	0,090
100	0	3	0

### 5.3 Contrôle de réception par mesures

Dans le cas où le caractère contrôlé est mesurable, on peut le déterminer sur chacune des unités prélevées et établir des règles d'acceptation et de refus des lots en se servant de la théorie de l'échantillonnage. Cette théorie nécessite cependant, dans le cas de mesures, certaines connaissances sur la loi de distribution du caractère dans les lots.

En général, on admet que la loi normale s'applique. Mais il est essentiel de vérifier préalablement cette hypothèse, en utilisant les tests de normalité exposés dans la norme X 06-050.

Dans le contrôle de réception par mesures, on peut retrouver, au moins en principe, les divers types de prélèvements mentionnés dans le cas du contrôle aux attributs ; mais les plans doubles et multiples sont peu ou pas utilisés, et les plans progressifs ne le sont que dans le cas où l'écart-type est connu et non estimé.

En prenant en considération la loi de distribution de la caractéristique mesurée dans le lot, dont on a admis (et vérifié) la normalité, on peut établir des règles de décision portant sur la valeur prise par la moyenne d'échantillon : celle-ci est elle-même distribuée en loi normale, dont les paramètres se déduisent aisément de ceux de la distribution de la caractéristique. Les règles traduisent la limitation aux valeurs requises de la proportion d'unités fabriquées qui se trouvent en dehors de la (ou des) tolérance(s) spécifiée(s).

On retrouve la même distinction que dans le cas des contrôles aux attributs : lots isolés ou en petit nombre, et séries continues de lots en provenance du même fabricant.

#### 5.3.1 Lots isolés ou en petit nombre

##### 5.3.1.1 Détermination d'un plan d'échantillonnage à partir des risques client et fournisseur

###### 5.3.1.1.1 Prélèvements simples

La distribution de la moyenne  $\bar{x}$  des mesures de la caractéristique  $X$  sur un échantillon de  $n$  unités est normale, sous l'hypothèse de la normalité de  $X$  ; ceci est d'ailleurs approximativement vrai même en dehors de la normalité de  $X$ , pour  $n$  assez grand, et même dès que  $n$  dépasse 5.

Cette loi normale de la moyenne a pour paramètres  $m$  (égal à la moyenne de la distribution de  $X$ ) et  $\sigma/\sqrt{n}$ ,  $\sigma$  étant l'écart-type de la distribution de  $X$ .

$T_i$  et  $T_s$  représentant les tolérances inférieure et supérieure de la spécification sur  $X$ , et sous réserve que l'intervalle intertolérance  $T_s - T_i$  soit supérieur à  $6\sigma$ , la règle d'acceptation du lot s'écrit :

$$T_i + K\sigma < \bar{x} < T_s - K\sigma$$

La norme AFNOR X 06-027 est divisée en deux parties : l'une correspond au cas où l'écart-type  $\sigma$  est connu, l'autre à celui où on le remplace par son estimation  $s$  calculée sur l'échantillon. Elle contient des tables fondées sur les valeurs de risque  $\alpha = 5\%$  et  $\beta = 10\%$  ; des annexes donnent les formules permettant de traiter les cas d'autres valeurs des risques.

Ces tables donnent les valeurs de  $K$  et de l'effectif  $n$ , en fonction des points de risque  $p_1$  et  $p_2$ , pour chacune des méthodes «  $\sigma$  » et «  $s$  ».

Le cas le plus simple est celui où l'on n'a qu'une limite de tolérance. Lorsque l'on a deux limites, on peut soit les traiter séparément, soit les combiner.

La norme présente une méthode graphique qui facilite l'organisation du contrôle ; elle donne par ailleurs des indications pour la construction de la courbe d'efficacité. Mais elle ne permet plus, comme le faisait une édition précédente, le tracé de cartes servant à mettre en évidence des dérives de qualité et donc essayer de les prévenir bien que s'agissant d'un contrôle *a posteriori*.

###### 5.3.1.1.2 Prélèvements progressifs

Il est possible d'appliquer le principe du plan progressif (cf. § 5.2.2.1.3) au cas du contrôle par mesures, mais à condition de connaître l'écart-type  $\sigma$  et, s'il existe deux limites de tolérance, de les considérer séparément.

Sans entrer dans le détail des calculs qui sont fondés sur les mêmes principes, on conseille d'utiliser la norme AFNOR X 06-025 qui contient des tables permettant de tracer des graphiques à utiliser dans le contrôle, ainsi que la méthode de construction de la courbe d'efficacité.

### 5.3.1.2 Détermination d'un plan d'échantillonnage à partir de l'effectif d'échantillon et de l'un des points de risque

Comme dans le cas du contrôle par attributs, on peut être amené à fixer à l'avance l'effectif d'échantillon en fonction d'impératifs économiques.

La norme X 06-027 permet de traiter ce problème et de déterminer  $K$  et le pourcentage de non-conformes attaché à l'autre point de risque. Les tables correspondantes, tant pour la méthode «  $\sigma$  » que pour la méthode «  $s$  », sont établies pour les valeurs de risque  $\alpha = 5\%$  ou  $\beta = 10\%$ .

### 5.3.2 Séries continues de lots en provenance du même fabricant

Les mêmes raisons historiques ont conduit les services militaires américains à appliquer au contrôle par mesures les méthodes mises au point pour le contrôle par attributs. L'ISO a repris ultérieurement la MIL STD correspondante et l'AFNOR leur a consacré sa norme X 06-023, qui est techniquement conforme à la norme ISO 3951,

avec des modifications assez nombreuses qui visent notamment à faciliter l'usage des tables.

Comme dans le cas des lots isolées, il est nécessaire de distinguer le cas où l'écart-type  $\sigma$  est connu et celui où on le remplace par son estimation  $s$  tirée de l'échantillon. Chaque cas donne lieu à une série de tables qui permettent de traiter les situations correspondant à divers choix possibles pour les paramètres du plan :

- choix de l'effectif du lot, du niveau de contrôle, du NQA ;
- choix de l'effectif d'échantillon, du NQA ;
- choix de l'effectif d'échantillon, de  $p_1$  correspondant à  $\alpha = 5\%$  ;
- choix de l'effectif d'échantillon, et du LQMAC.

Une méthode graphique est préconisée pour le déroulement du contrôle, tant pour le cas d'une seule limite de tolérance que pour celui de deux limites considérées séparément.

Le cas de deux limites combinées est plus délicat. Il est traité grâce à une série d'abaques donnée dans la norme. Celle-ci comporte également des tables et graphiques permettant de consulter les courbes d'efficacité des divers plans, ainsi que les règles de passage d'un contrôle normal à un contrôle renforcé, et inversement d'un contrôle normal à un contrôle réduit.

# Maîtrise statistique des processus (MSP)

## Utilisation des cartes de contrôle

par **Gérard BRUNSCHWIG**

*Ingénieur Général honoraire des Ponts et Chaussées*

et **Alain PALSKY**

*Ingénieur, Responsable MSP du groupe Rhône-Poulenc*

### Bibliographie

#### Références

- [1] JURAN (J.). – *Planifier la qualité*. Coll. AFNOR Gestion (1989).
- [2] LAMOUILLE (J.L.), MURRY (B.) et POTIÉ (C.). – *La maîtrise statistique des procédés (SPC). Démarche et outils*. 126 p. Coll. AFNOR Gestion (1989).
- [3] SOUVAY (P.). – *La statistique, outil de la qualité*. 289 p. Coll. AFNOR Gestion (1986).

- [4] *Aide-mémoire pratique des techniques statistiques pour ingénieurs et techniciens supérieurs*. 274 p. CERESTA (1986).
- [5] RYAN (T.). – *Statistical methods for quality improvement*. 446 p. Wiley (1989).
- [6] CAVÉ (R.). – *Le contrôle statistique des fabrications*. Eyrolles (1966).
- [7] LUCAS (J.M.). – *Counted Data CUSUM*. Technometrics, 27, 129-144 (1985).

- [8] LUCAS (J.M.) et SACCUCCI (M.S.). – *Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements*. Technometrics, 32, 1, 1-30 (1990).

#### Dans les techniques de l'Ingénieur

- [9] POIRIER (J.). – *Observation statistique*. R 240, traité Mesures et Contrôle juil. 1992.
- [10] POIRIER (J.). – *Tables statistiques*. R 270, traité Mesures et Contrôle juil. 1992.

### Revue française et étrangères

Revue de Statistique appliquée publiée par l'Institut de Statistiques de l'Université (ISUP, Université Pierre-et-Marie Curie).

Bulletin du MFQ (Qualité en mouvement)

Technometrics (USA)

Journal of Quality Technology (USA).

### Normalisation

#### Association française de normalisation AFNOR

- FD X 06-100 05.93 Guide pour la sélection des méthodes statistiques normalisées
- NF ISO 3534-1 12.93 Statistique. Vocabulaire et symboles – Partie 1 : Probabilités et termes statistiques généraux (indice de classement X 06-002-1).
- NF ISO 3534-2 12.93 Statistique. Vocabulaire et symboles – Partie 2 : Maîtrise statistique de la qualité (indice de classement : X 06-002-2).
- FD X 06-019 05.92 Procédures d'échantillonnage pour les contrôles par attributs – Introduction au système d'échantillonnage par attributs.
- NF X 06-020 11.92 Règles d'échantillonnage pour les contrôles par attributs – Procédures d'échantillonnage successif partiel.
- NF X 06-021 10.91 Principes du contrôle statistique de lots.
- NF X 06-022 10.91 Sélection de plans d'échantillonnage pour le contrôle par comptage de la proportion de la proportion d'individus non conformes ou du nombre moyen de non-conformités par unité.
- NF X 06-023 12.84 Sélection de plans d'échantillonnage pour le contrôle par mesurage de la proportion d'individus non conformes.
- NF ISO 8422 10.93 (NF X 06-024) Plans d'échantillonnage progressif pour le contrôle par attributs.
- NF ISO 8423 10.93 (NF X 06-025) Plans d'échantillonnage progressif pour le contrôle par mesures des pourcentages de non-conformes (écart-type connu).

- NF X 06-026 06.87 Contrôle par comptage de la proportion d'individus non conformes ou du nombre moyen de non-conformités par unité – Méthodes générales pour la construction d'un plan d'échantillonnage.
- NF X 06-027 12.87 Contrôle par mesurage de la proportion d'individus non conformes – Méthodes générales pour la construction d'un plan d'échantillonnage.
- NF X 06-028 06.87 Contrôle par comptage du nombre d'individus non conformes, dans le cas d'un lot isolé.
- NF X 06-029 09.89 Contrôle de réception – Règles de décision applicables au contrôle d'un lot dont les individus possèdent plusieurs caractères indépendants auxquels sont appliqués des plans d'échantillonnage statistiques.
- FD X 060-030 09.92 Guide pour la mise en place de la maîtrise statistique des processus.
- FD X 06-031 07.70 Contrôle en cours de fabrication – Cartes de contrôle.
- (NB. Cette dernière norme est en cours de révision ; la norme révisée comportera 5 parties :
0. Présentation générale
  1. Cartes de Shewhart aux mesures
  2. Cartes de Shewhart aux attributs
  3. Cartes de moyennes mobiles
  4. Cartes à sommes cumulées).
- NF X 06-050 12.91 Application de la statistique. Étude de la normalité d'une distribution.

Le recueil des normes statistiques (3 tomes, 6<sup>e</sup> édition, 1993) rassemble dans son tome 2 les normes de contrôle statistique.

## Organismes

### France

MFQ Mouvement Français pour la Qualité.

### États-Unis

ASQC American Society for Quality Control.

### International

EOQC/OECQ European Organization for Quality Control/Organisation Européenne pour le Contrôle de la Qualité.

---