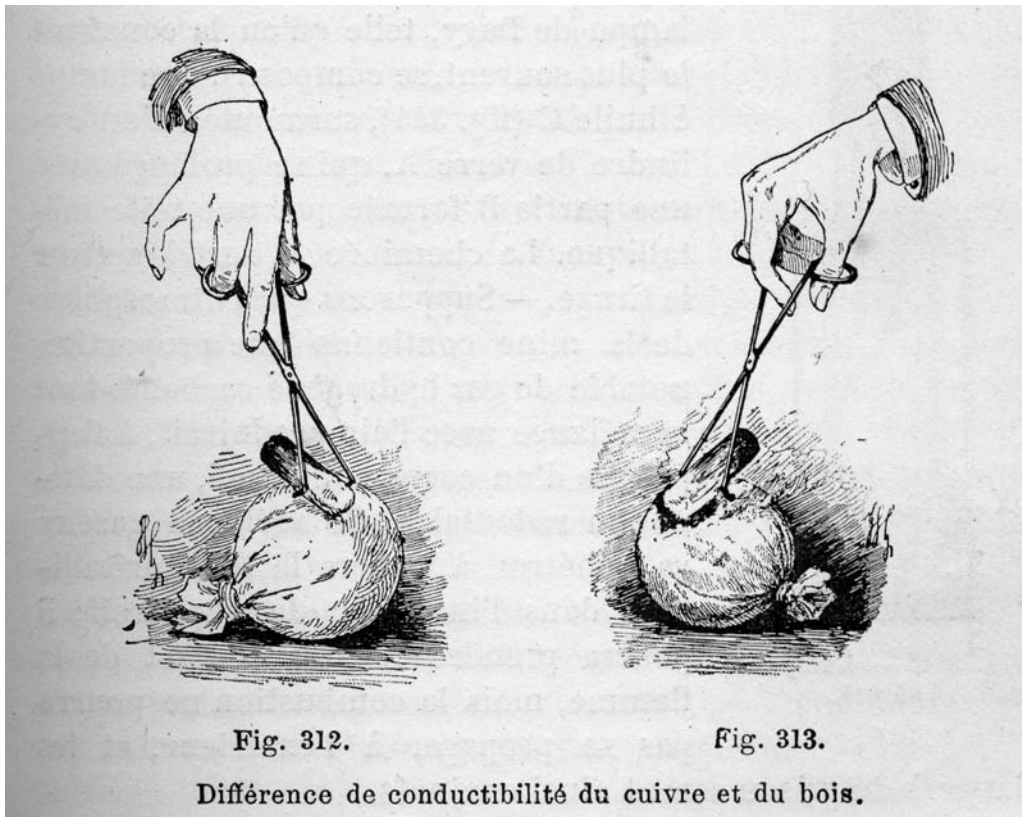


CONDUCTION



INTRODUCTION	- 56 -
CHAPITRE 1	- 57 -
GENERALITES ET EQUATIONS GENERALES	- 57 -
1.1 Généralités	- 57 -
1.2 Quelques définitions	- 57 -
1.2.1 Flux de chaleur à travers une surface	- 57 -
1.2.2 Densité de flux de chaleur	- 57 -
1.2.3 Surfaces isothermes	- 57 -
1.2.4 Gradient de température	- 57 -
1.3 Loi de FOURIER	- 58 -
1.4 EQUATION GENERALE DE LA CHALEUR	- 60 -
1.4.1 Etablissement de l'équation générale	- 60 -
1.4.2 Etude de cas particuliers :	- 63 -
1.4.2.1 La conductivité ne dépend que de la température du point considéré	- 63 -
1.4.2.2 λ ne varie pas avec la température ou sa variation est négligeable	- 63 -
1.4.2.3 λ ne varie pas avec la température et il n'y a pas de dégagement de chaleur interne	- 63 -
1.4.2.4 La température n'est plus fonction du temps.	- 63 -
1.4.3 Etablissement de l'équation de la chaleur par écriture d'un bilan en coordonnées cartésiennes	- 64 -
1.4.3.1 Calcul de d^2q_1	- 64 -
1.4.3.2 Calcul de d^2q_2	- 65 -
1.4.3.3 Calcul de d^2q_3	- 66 -
1.4.3.4 Bilan énergétique global	- 66 -
1.4.4 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques ou sphériques	- 66 -
1.4.4.1 Coordonnées cylindriques	- 66 -
1.4.4.2 Coordonnées sphériques	- 68 -
1.5 Conditions aux limites spatio-temporelles pour la résolution de l'équation de la chaleur	- 69 -
1.5.1 Condition initiale	- 69 -
1.5.2 Conditions aux limites	- 69 -
1.5.2.1 La température est imposée sur la surface S (problème de Dirichlet)	- 69 -
1.5.2.2 La densité de flux est imposée en surface (problème de Neumann)	- 69 -
1.5.2.3 Le transfert est linéaire à la surface (problème mixte ou de Fourier)	- 70 -
1.5.2.5 Conclusions	- 70 -
CHAPITRE 2	- 72 -
TRANSMISSION DE LA CHALEUR EN REGIME PERMANENT	- 72 -
2.1 PROBLEME DU MUR EN CONDUCTION "MORTE"	- 72 -
2.1.1 Cas où λ est constant	- 73 -
2.1.1.1 Détermination du champ de température	- 73 -
2.1.1.2 Calcul de la densité de flux de chaleur	- 73 -
2.1.2 La conductivité du matériau varie avec la température	- 74 -
2.1.2.1 Détermination du champ de température	- 74 -
2.1.2.2 Détermination de la densité de flux traversant le mur	- 74 -
2.2 PROBLEME DU CYLINDRE	- 75 -
2.2.1 Détermination du champ de température	- 75 -
2.2.2 Calcul du flux de chaleur par unité de longueur du tube	- 76 -
2.3 PROBLEME DE LA SPHERE	- 76 -
2.4 SYNTHESE DES RESULTATS SIGNIFICATIFS (Mur, Cylindre et Sphère)	- 77 -

2.5 CONDUCTION A TRAVERS PLUSIEURS CORPS PLACES EN SERIE OU PARALLELE	- 79 -
2.5.1 Résistance thermique du mur	- 80 -
2.5.2 Résistances thermiques du cylindre et de la sphère	- 82 -
CHAPITRE 3	- 83 -
TRANSMISSION DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME VARIABLE	- 83 -
3.1. Problématique	- 83 -
3.1.1. Solide isotherme à tout instant	- 83 -
3.1.2. Solide non isotherme passant d'un état stable vers un autre	- 83 -
3.1.3. Solide en condition périodique	- 84 -
3.1.4. Régime variable quelconque	- 84 -
3.2 METHODES ANALOGIQUES	- 85 -
3.2.1 Principe	- 85 -
3.2.2 Analogie électrique	- 85 -
3.2.3 Analogie électrique en régime variable	- 86 -
3.3 METHODES NUMERIQUES	- 87 -
3.3.1 Principe	- 87 -
3.3.2 Résolution de l'équation de Laplace en régime permanent des températures	- 87 -
3.3.3 Résolution de l'équation de la chaleur en régime variable	- 88 -
3.3.3.1 $\theta = 0$: schéma dit explicite	- 91 -
3.3.3.2 $\theta = 1$ Schéma dit implicite	- 92 -
3.3.3.3 $\theta = \frac{1}{2}$ Schéma de Crank-Nicolson	- 92 -

INTRODUCTION

La conduction est le mode de transfert de chaleur existant dans un milieu donné sans qu'il y ait déplacement apparent de matière. C'est ce qui se passe en particulier dans un milieu solide homogène (métal, paroi...), mais qui a lieu aussi dans les fluides immobiles.

La conduction ne peut exister que s'il existe des écarts de températures c'est à dire si le gradient de température n'est pas nul. Dans le cas contraire le milieu est en équilibre thermique et aucun transfert de chaleur ne peut se produire. Pour que ce gradient de température existe, il faut une action externe au système pour pouvoir maintenir des conditions de températures données aux limites du système.

Dans le domaine du Génie Civil la conduction est le mode privilégié rencontré dans les parois du bâtiment et le sol.

Afin de simplifier les modèles et leurs résolutions, l'analyse est souvent faite en régime permanent des températures c'est à dire que la température en tout point $M(x, y, z)$ est stable : c'est le *régime permanent*.

Dans la réalité, on se trouve toujours dans des conditions de *régime variable*. Dans ces conditions, la résolution de ces problèmes est malaisée et nécessite généralement le recours à des méthodes numériques.

Dans cette partie du cours relatif à la conduction nous proposons dans le chapitre 1 de rappeler certaines définitions et de définir la loi de Fourier et l'équation de la chaleur.

Le chapitre 2 est consacré au régime permanent appliqué à différentes géométries (mur, cylindre, sphère).

Dans le chapitre 3, le régime variable est abordé dans ses grands principes.

Enfin le chapitre 4 illustre cette partie par deux applications concernant la métrologie des propriétés thermophysiques des matériaux.

CHAPITRE 1

GENERALITES ET EQUATIONS GENERALES

1.1 Généralités

La relation fondamentale de la transmission de la chaleur par conduction a été proposée par FOURIER en 1822. Pour bien comprendre cette loi, il faut au préalable définir un certain nombre de grandeurs physiques.

1.2 Quelques définitions

1.2.1 Flux de chaleur à travers une surface

C'est la quantité de chaleur qui traverse la surface considérée pendant l'unité de temps. Le symbole utilisé est la lettre ϕ . L'unité dans le système international est le Watt.

$$d\phi = d^2Q / dt$$

1.2.2. Densité de flux de chaleur

C'est la quantité de chaleur qui traverse l'unité de surface pendant l'unité de temps. C'est donc le flux de chaleur par unité de surface (ou densité de flux). On le notera φ . L'unité dans le système international est le Watt / m².

$$\varphi = d\phi / dS$$

1.2.3. Surfaces isothermes

Considérons dans un corps homogène un champ de température T défini en chaque point et à chaque instant par la fonction $T = f(x, y, z, t)$. x, y, z sont les variables spatiales, t est le temps. Dans tout le corps, on peut définir à l'instant t des surfaces qui constituent les lieux des points ayant la même température. Ce sont les surfaces isothermes.

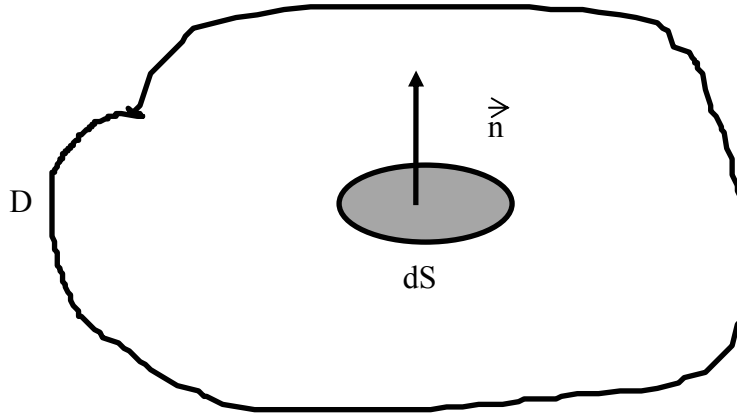
Deux surfaces isothermes ne peuvent se couper car on aurait alors deux températures différentes en un même point ce qui est physiquement impossible.

1.2.4 Gradient de température

Le gradient de température est le vecteur qui caractérise en un point donné la variation de la fonction température. Ce vecteur est en tout point normal à la surface isotherme passant par ce point.

1.3 Loi de FOURIER

Considérons un milieu solide D dans lequel une surface élémentaire dS est orientée par sa normale unitaire \vec{n} .



La quantité de chaleur $d^2 Q$ qui traverse la surface dS pendant l'intervalle de temps dt dans le sens de la normale \vec{n} est donnée par la loi de FOURIER :

$$d^2 Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt$$

ou : $\overrightarrow{\text{grad } T}$ est le gradient de température défini suivant les trois axes Ox, Oy et Oz par :

$$\overrightarrow{\text{grad } T} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right.$$

λ est un coefficient appelé conductivité thermique du matériau (en W/m.°C)

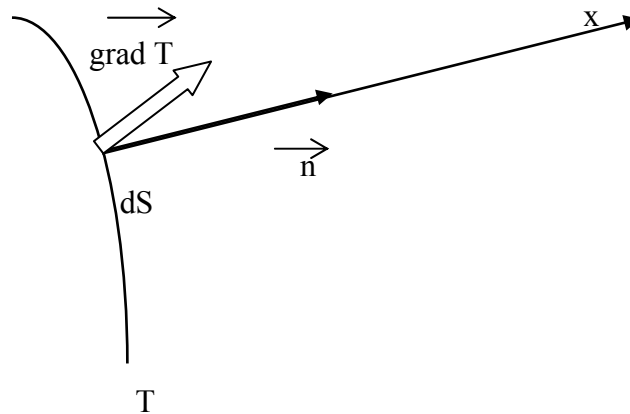
On a également :

$$d\Phi = \frac{d^2 Q}{dt} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{flux de chaleur})$$

$$\text{et : } d\phi = \frac{d^2 Q}{dt \cdot dS} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} \quad (\text{densité de flux de chaleur})$$

La présence du signe - dans le second membre des relations signifie que le flux de chaleur progresse dans le sens opposé au gradient de température c'est à dire des températures les plus élevées vers les températures les plus basses (ce qui est du bon sens physique)..

Si la surface dS est située sur une surface isotherme les vecteurs $\overline{\text{grad}T}$ et \vec{n} sont colinéaires d'où



$$d^2Q = -\lambda \frac{dT}{dx} dS dt$$

ou $d\Phi = -\lambda \frac{dT}{dx} dS$ $\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$

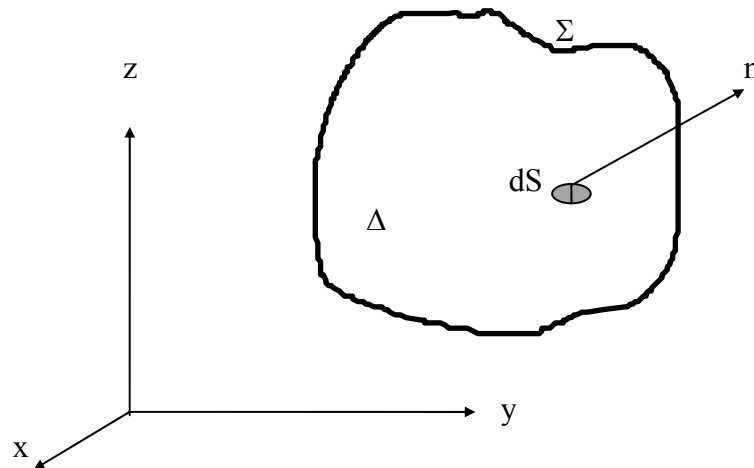
Substances	λ en W/ m°C
- Gaz à la pression atmosphérique	0,006 - 0,15
- Matériaux solides isolants (Laine de verre, polystyrène, liège, amiante...)	0,025 - 0,18
- Liquides non métalliques	0,075 - 0,60
- Matériaux non métalliques (brique, pierre à bâtir, béton, bois..)	0,10 - 2,2
- Métaux liquides	7,5 - 67
- Alliages métalliques	12 - 100
- Métaux purs	45 - 365

1.4 EQUATION GENERALE DE LA CHALEUR

1.4.1 Etablissement de l'équation générale

Considérons un champ de température $T(x, y, z, t)$ dans un volume Δ limité par une surface Σ d'un corps quelconque de masse volumique ρ , de chaleur massique à volume constant C_v et de conductivité thermique λ (figure 1-3).

En un point M de la surface Σ , considérons un élément de surface dS et n le vecteur unitaire de la normale en M orienté vers l'extérieur.



Nous allons par application de la formule de FOURIER calculer la quantité de chaleur $d^2 Q_1$ qui **pénètre** dans le volume Δ à travers dS pendant l'intervalle de temps dt , donc dans le sens opposé à la normale n . Le signe - disparaît donc de la formule:

$$d^2 Q_1 = -\lambda \cdot \overline{\text{grad} T} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt$$

La quantité de chaleur totale qui pénètre dans le volume Δ à travers la surface Σ pendant dt est alors donné par :

$$Q_1 = \iint_{\Sigma} \lambda \cdot \overline{\text{grad} T} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt$$

Transformons cette intégrale de surface en une intégrale de volume à l'aide de l'expression:

$$\iiint_{\Delta} \overline{\text{div} F} \cdot dV = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

on obtient :

$$Q_1 = \iint_{\Sigma} \lambda \cdot \overline{\text{grad} T} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt = \iiint_{\Delta} \text{div}(\lambda \cdot \overline{\text{grad} T}) \cdot dV \cdot dt$$

où dV est un élément de volume pris à l'intérieur de Δ .

Calculons maintenant la quantité de chaleur Q_2 créée dans le volume Δ . En effet dans le cas général d'un corps quelconque il peut y avoir création de chaleur dans la masse. Soit

$P(x,y,z,t)$ le flux de chaleur créé par unité de volume. Q_2 est alors donnée par la formule :

$$Q_2 = \iiint_{\Delta} P(x, y, z, t) dV dt$$

Faisons maintenant le bilan énergétique pour le volume Δ , ce qui nous permet d'écrire :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

où Q_3 représentera la quantité de chaleur nécessaire à la variation de température du volume

Δ . Si $\frac{\partial T}{\partial t} dt$ représente la variation de température du volume dV pendant dt , l'équation de

la calorimétrie permet d'écrire :

$$d^2 Q_3 = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} dt dV$$

$$\text{et } Q_3 = \iiint_{\Delta} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} dV dt$$

D'où l'équation de bilan:

$$\iiint_{\Delta} \text{div}(\lambda \cdot \overline{\text{grad } T}) \cdot dV \cdot dt + \iiint_{\Delta} P(x, y, z, t) dV dt = \iiint_{\Delta} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} dV dt$$

ou encore:

$$\text{div}(\lambda \cdot \overline{\text{grad } T}) + P(x, y, z, t) = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

et en développant $\text{div}(\lambda \cdot \overline{\text{grad } T})$ il vient :

$$\lambda \cdot \text{div}(\overline{\text{grad } T}) + \overline{\text{grad } \lambda} \cdot \overline{\text{grad } T} + P = \rho \cdot C_v \cdot \frac{\delta T}{\delta t}$$

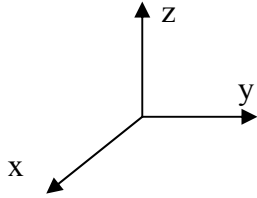
$$\lambda \cdot \Delta T + \overline{\text{grad } \lambda} \cdot \overline{\text{grad } T} + P = \rho \cdot C_v \cdot \frac{\delta T}{\delta t}$$

Formule dans laquelle ΔT est le Laplacien de la température

$$\Delta T = \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} \quad \text{en coordonnées cartésiennes.}$$

L'expression ainsi obtenue représente l'équation de la chaleur régissant les transferts par conduction en régime variable des températures avec création de chaleur dans la masse et une conductivité λ fonction des variables spatiales et éventuellement du temps.

En coordonnées cartésiennes (x, y, z)



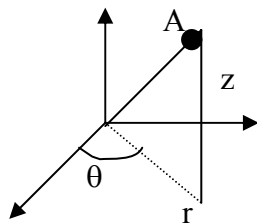
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques (r, z, θ)

Dans le cas général

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Dans le cas d'une symétrie cylindrique T = f (r)

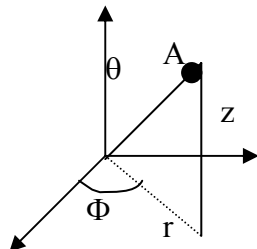


$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Dans le cas général
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

Dans le cas d'une symétrie sphérique T = f (r)



$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$$

Expression du Laplacien de la température dans différents repères

1.4.2 Etude de cas particuliers :

1.4.2.1 La conductivité ne dépend que de la température du point considéré

En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{\text{grad } \lambda} \cdot \overrightarrow{\text{grad } T}$ l'équation de la chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\lambda \cdot \Delta T + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + P = \rho \cdot C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

1.4.2.2 λ ne varie pas avec la température ou sa variation est négligeable

C'est le cas particulier important d'un matériau homogène et isotrope avec un coefficient λ pouvant être considéré comme constant.

L'expression précédente devient alors :

$$\lambda \cdot \Delta T + P = \rho \cdot C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

1.4.2.3 λ ne varie pas avec la température et il n'y a pas de dégagement de chaleur interne

On a :

$$\lambda \cdot \Delta T = \rho \cdot C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

Expression que l'on a l'habitude de mettre sous la forme :

$$\frac{\lambda}{\rho C_v} \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \frac{\lambda}{\rho C_v} = a$$

Le coefficient **a** qui rassemble les caractéristiques thermophysiques du matériau dans lequel s'effectue le transfert est appelé la **diffusivité thermique**. Il s'exprime dans le système S.I. en m²/s.

1.4.2.4 La température n'est plus fonction du temps.

C'est l'étude du **régime permanent** avec ou sans dégagement de chaleur. Si l'on suppose que la conductivité λ est une constante indépendante de la température, il vient :

- avec dégagement de chaleur interne: $P \neq 0$

$$\lambda \Delta T + P = 0$$

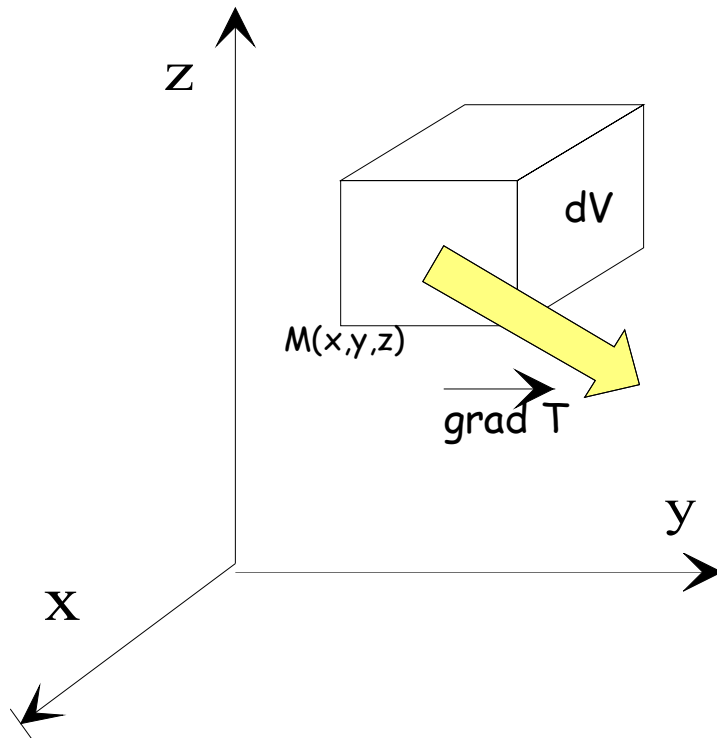
- sans dégagement de chaleur interne: $P = 0$

$$\Delta T = 0$$

Equation connue sous le nom d'**équation de LAPLACE**.

1.4.3 Etablissement de l'équation de la chaleur par écriture d'un bilan en coordonnées cartésiennes

Pour simplifier les calculs nous nous placerons dans l'hypothèse d'un matériau homogène, isotrope où l'on peut supposer que le coefficient λ est égal à une constante indépendante à la fois des variables spatiales et du temps. C'est le cas particulier étudié au paragraphe précédemment.



Considérons un petit élément parallélépipédique de volume dV (avec $dV = dx dy dz$) du matériau précédemment défini placé dans un champ de température caractérisé en tout

point par un vecteur $\vec{\text{grad}} T$ donné. Soient λ , ρ et C_v les caractéristiques thermiques du matériau supposées constantes.

Effectuons le bilan énergétique global sur l'élément de volume dV .

Il vient:

$$d^2q_1 + d^2q_2 = d^2q_3$$

avec: - d^2q_1 quantité de chaleur élémentaire pénétrant dans dV
 - d^2q_2 quantité de chaleur élémentaire créée dans dV
 - d^2q_3 quantité de chaleur élémentaire correspondant à la variation d'énergie interne de dV

1.4.3.1 Calcul de d^2q_1

Considérons les deux faces parallèles perpendiculaires à l'axe des x (figure 1-5). Soient (1) et (2) ces deux faces dans l'ordre des x croissants. Définissons les normales à ces deux faces (par exemple sens positif suivant l'axe des x) et calculons les quantités de chaleur qui les traversent avec les conventions de signe de la loi de Fourier. Il vient:

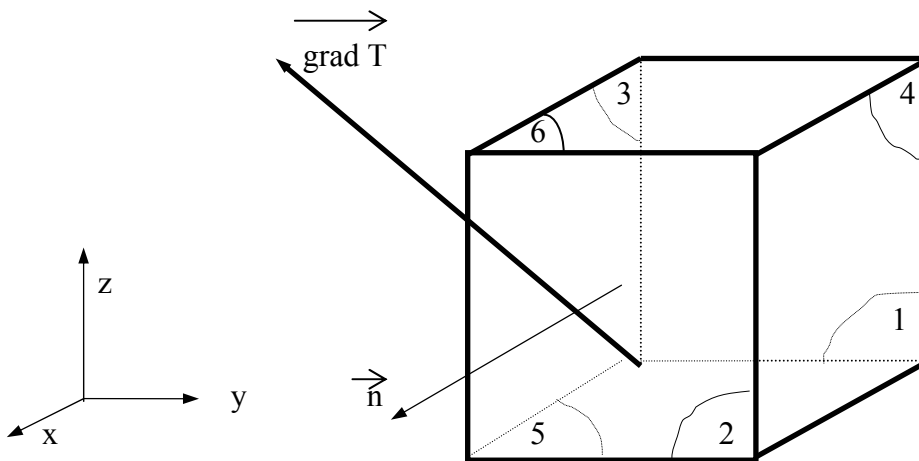


figure 1-5

$$\text{face (1)} \quad d^2 q_x = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x dy \cdot dz \cdot dt$$

$$\text{face (2)} \quad d^2 q_{(x+dx)} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} dy \cdot dz \cdot dt$$

Avec le sens choisi pour les normales aux deux faces $d^2 q_x$ est une quantité de chaleur qui pénètre dans dv , $d^2 q_{x+dx}$ est une quantité de chaleur qui sort. Un calcul semblable nous permet pour les faces (3) et (4) (sens de y croissant) et pour les faces (5) et (6) (sens de z croissant) de calculer les quantités $d^2 q_y$ et $d^2 q_{y+dy}$ et $d^2 q_z$ et $d^2 q_{z+dz}$. On obtient finalement la quantité de chaleur pénétrant dans dv pendant l'intervalle de temps dt soit $d^2 q_1$.

$$d^2 q_1 = (d^2 q_x - d^2 q_{x+dx}) + (d^2 q_y - d^2 q_{y+dy}) + (d^2 q_z - d^2 q_{z+dz})$$

Tous calculs faits il vient :

$$\begin{aligned} d^2 q_1 &= \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] dx \, dy \, dz \, dt \\ &= \lambda \Delta T \, dV \, dt \end{aligned}$$

1.4.3.2 Calcul de $d^2 q_2$

Si on appelle P la puissance créée par unité de volume à l'intérieur du matériau (terme source) on a simplement :

$$d^2 q_2 = P \, dV \, dt$$

1.4.3.3 Calcul de d^2q_3

Si l'élévation de température de dV pendant l'intervalle de temps dt est $\frac{\partial T}{\partial t} dt$ on a comme précédemment :

$$d^2q_3 = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} dV dt$$

1.4.3.4 Bilan énergétique global

$$d^2q_1 + d^2q_2 = d^2q_3$$

$$\text{ou} \quad \lambda \Delta T dV dt + P dV dt = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} dV dt$$

$$\lambda \Delta T + P = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

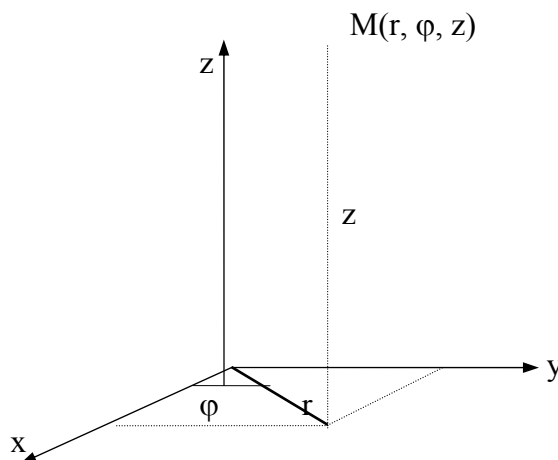
On retrouve bien l'expression correspondant au cas particulier traité.

1.4.4 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques ou sphériques

1.4.4.1 Coordonnées cylindriques

Toutes les expressions précédentes sont valables en coordonnées cylindriques (φ , r , z) à condition d'utiliser l'expression convenable du Laplacien qui est dans ce cas :

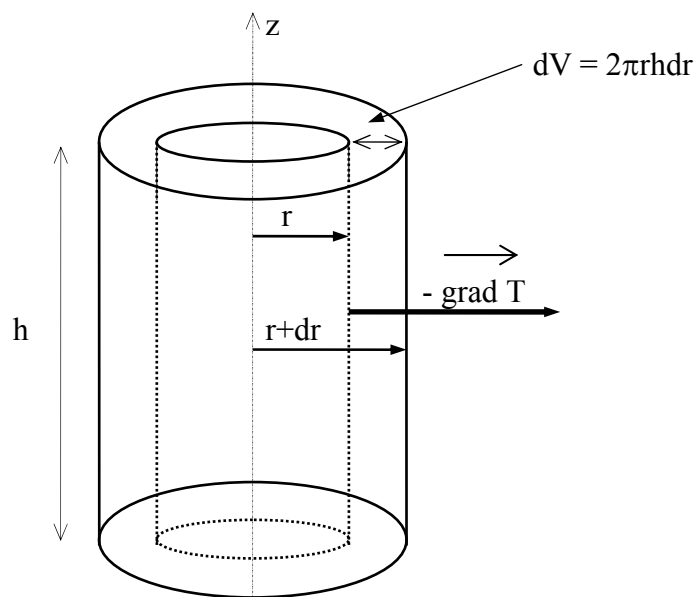
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



Dans certains problèmes à symétrie axiale cette expression se simplifie, la température n'étant plus fonction que de la variable spatiale r ; $T = f(r, t)$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

A titre d'exercice on peut retrouver l'équation de la chaleur directement en faisant le bilan énergétique non plus sur un élément de volume parallélépipédique ($dV = dx dy dz$) mais sur un volume élémentaire caractéristique de l'accroissement des coordonnées curvilignes choisies. On se bornera à étudier un système de révolution $T = f(r, t)$ en supposant que le matériau est homogène, isotrope et que λ est indépendant de la température. La création de chaleur interne est également supposée nulle ($P = 0$).



Le volume élémentaire choisi est l'espace compris entre deux cylindres d'axe Oz de rayon r et $r + dr$, limité par deux plans perpendiculaires à Oz. Le flux de chaleur à travers ces deux derniers plans est nul puisque la température dépend uniquement de r (le vecteur $\text{grad } T$ est normal à l'axe des z). On calculera donc uniquement la quantité de chaleur pénétrant dans le volume élémentaire dV à travers les deux surfaces latérales.

- Surface interne :

$$dq_r = - \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_r 2 \pi r h dt$$

- Surface externe :

$$dq_{r+dr} = - \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r+dr} 2 \pi (r + dr) h dt$$

Avec les conventions de signe choisies la quantité de chaleur pénétrant dans dV pendant l'intervalle de temps dt est égale à :

$$dq_r - dq_{r+dr} = \lambda 2\pi r h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dt$$

Cette quantité de chaleur sert à élever la température du volume élémentaire dV de la quantité $\frac{\partial T}{\partial t} dt$. D'où :

$$\lambda 2\pi r h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dt = \rho c_v 2\pi r h dr \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \frac{\partial T}{\partial t}$$

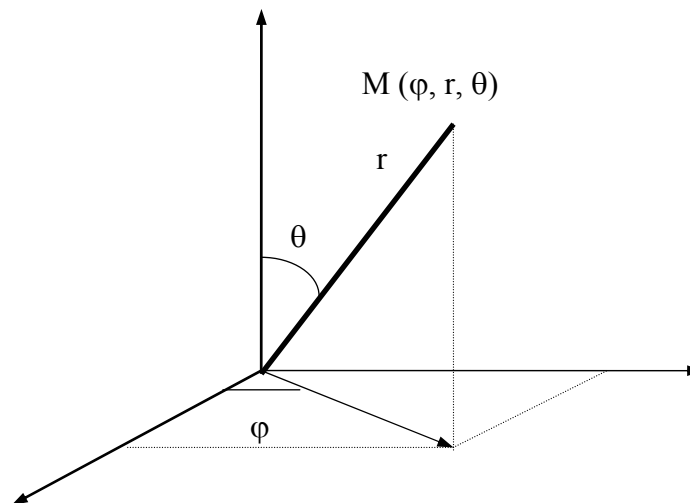
en introduisant la diffusivité $a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$

Nous retrouvons bien l'expression de l'équation de la chaleur dans le cas considéré où le Laplacien a été écrit en coordonnées cylindriques.

1.4.4.2 Coordonnées sphériques

L'expression générale du Laplacien en coordonnées sphériques se déduit de celui en coordonnées cartésiennes en utilisant les changements de variables suivants:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \sin \varphi \\ y &= r \sin \theta \cos \varphi \\ z &= r \cos \theta \\ \mu &= \cos \theta \end{aligned}$$



Il vient :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

Cette expression se simplifie dans le cas particulier d'un système présentant une symétrie sphérique. La température est alors une fonction qui ne dépend plus des variables φ et θ . Elle ne dépend que de la variable r .

Le Laplacien s'écrit :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{ou} \quad \Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r T)}{\partial r^2}$$

A titre d'exemple, et comme nous l'avons fait dans le cas des coordonnées cylindriques, on pourrait retrouver directement l'équation de la chaleur en faisant le bilan thermique au niveau d'un volume élémentaire égal à l'espace compris entre deux sphères de rayons respectifs r et $r + dr$.

1.5 Conditions aux limites spatio-temporelles pour la résolution de l'équation de la chaleur

L'équation générale de la chaleur exprime une relation entre la fonction température T et les variables x , y , z et t . La solution mathématique de cette équation aux dérivées partielles, linéaire, du deuxième ordre admet en principe une infinité de solutions. Aussi, sa résolution nécessite la connaissance, d'une part de la condition initiale c'est à dire la répartition initiale des températures en tout point du milieu $T(x, y, z, 0)$, d'autre part la loi de variation en fonction du temps de la température ou de sa dérivée normale sur la surface S . Ce sont **les Conditions aux limites spatio-temporelles**.

1.5.1 Condition initiale

C'est la répartition de température à l'instant $t = 0$ soit $T_0 = f(x, y, z, 0)$. Généralement cette condition est connue.

1.5.2 Conditions aux limites

Sur les frontières d'un matériau différents types de conditions aux limites peuvent apparaître dans les problèmes couramment rencontrés en transfert de chaleur.

1.5.2.1 La température est imposée sur la surface S (problème de Dirichlet)

$$T_S = f(M_S, t)$$

1.5.2.2 La densité de flux est imposée en surface (problème de Neumann)

$$\varphi = -\lambda \left(\frac{dT}{dn} \right)_S = f(M_S, t)$$

où $\left(\frac{dT}{dn} \right)_S$ est la dérivée normale à la surface.

1.5.2.3 Le transfert est linéaire à la surface (problème mixte ou de Fourier)

On précisera ultérieurement (voir troisième partie de ce cours: Transferts de chaleur par convection) que le flux de chaleur échangé par convection entre une paroi solide à la température T_S et le fluide qui la baigne à la température T_g est donné par :

$$\varphi_c = h_c (T_S - T_g)$$

avec h_c coefficient d'échange superficiel par convection.

1.5.2.4 Le solide étudié est en contact avec un autre matériau

A l'interface S des deux milieux possédant des conductivités différentes λ_1 et λ_2 la conservation du flux s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad } T_1} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad } T_2} \quad \text{sur } S$$

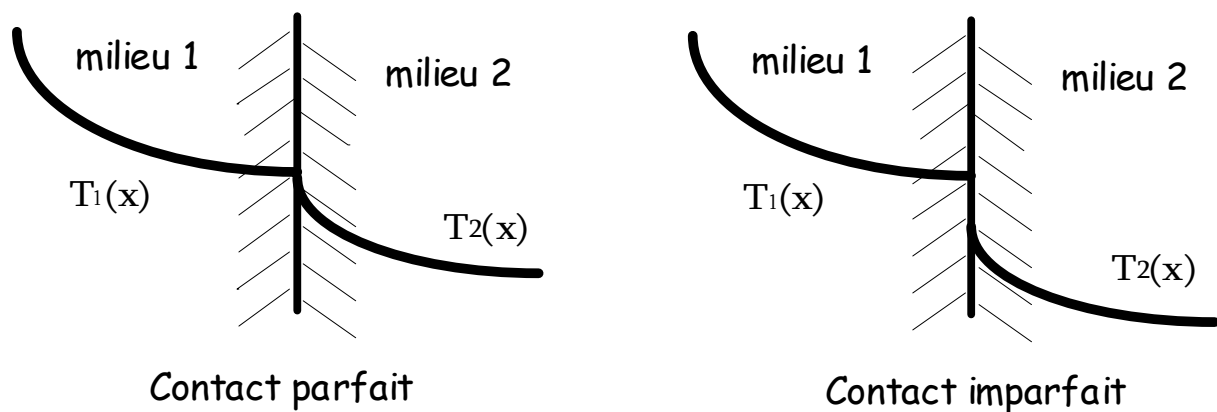
Une deuxième condition est obtenue, dans le cas d'un contact parfait. Il s'agit de l'égalité des températures sur S :

$$T_1 = T_2$$

Dans la réalité cette condition n'est pas réalisée : il y a discontinuité de la température au contact des deux matériaux. La condition obtenue sur l'interface s'écrit alors :

$$T_1(S) - T_2(S) = R \cdot \varphi$$

φ étant la densité de flux traversant l'interface. R représente la résistance thermique de contact qui sera précisée dans le chapitre suivant.



1.5.2.5 Conclusions

Les conditions aux limites rencontrées dans les problèmes du thermique sont rappelées dans le tableau suivant:

- **Conditions de Dirichlet** : température imposée sur la surface

$$T_S = f(M_S, t)$$

- **Conditions de Neumann** : densité de flux imposée à la surface :

$$\varphi = -\lambda \left(\frac{dT}{dn} \right)_s = f(M_S, t)$$

- **Conditions de Fourier** : densité de flux fonction linéaire de l'écart de température surface-milieu baignant la surface (milieu fluide).

$$\varphi = -\lambda \left(\frac{dT}{dn} \right)_s = h (T_S - T_F)$$

- **contact entre deux matériaux**

$$\lambda_1 \left(\frac{dT_1}{dn} \right)_s = \lambda_2 \left(\frac{dT_2}{dn} \right)_s$$

$$T_1 = T_2 \quad \text{ou} \quad |T_1 - T_2| = R \lambda_1 \left(\frac{dT_1}{dn} \right) = R \lambda_2 \left(\frac{dT_2}{dn} \right)$$

CHAPITRE 2

TRANSMISSION DE LA CHALEUR EN REGIME PERMANENT

Dans ce chapitre nous traiterons des méthodes analytiques de résolution de l'équation de la chaleur en régime permanent. Les méthodes analogiques, graphiques et numériques seront étudiées ultérieurement.

L'équation de la chaleur est sous sa forme la plus générale donnée par l'équation :

$$\lambda \Delta T + \vec{\text{grad}} \lambda \cdot \vec{\text{grad}} T + P = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

En régime permanent (T indépendant de t) il vient :

$$\lambda \Delta T + \vec{\text{grad}} \lambda \cdot \vec{\text{grad}} T + P = 0$$

Nous allons étudier un certain nombre de cas particuliers simples du fait de leur géométrie. Nous terminerons par une méthode plus générale de résolution de l'équation de LAPLACE.

2.1 PROBLEME DU MUR EN CONDUCTION "MORTE"

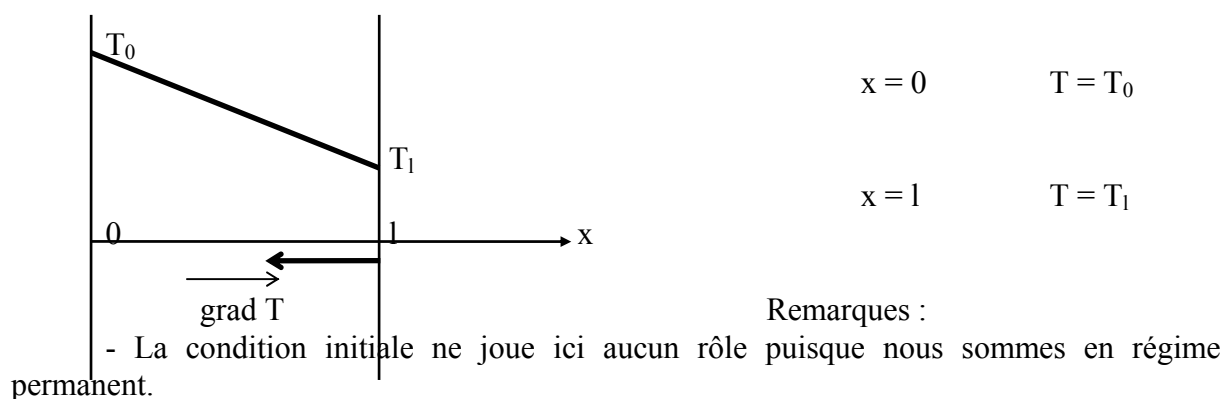
(sans sources internes de chaleur $P=0$)

Considérons un matériau homogène et isotrope limité par deux surfaces planes parallèles de dimensions infinies.

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\lambda \Delta T + \vec{\text{grad}} \lambda \cdot \vec{\text{grad}} T = 0$$

Conditions aux limites du problème: Les deux faces du mur sont maintenues à des températures fixes dans le temps (conditions de Dirichlet)



- Le problème traité est un problème à une dimension. La température est uniquement fonction de la variable x .

Le Laplacien ΔT s'écrit alors $\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2}$

L'équation devient :

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d\lambda}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} = 0$$

c'est-à-dire: $\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0$

2.1.1 Cas où λ est constant

C'est le cas pratique le plus courant et cette approximation est valable lorsque les températures T_0 et T_1 sont voisines :

2.1.1.1 Détermination du champ de température

L'équation se réduit à :

$$\frac{dT}{dx} = Cste$$

d'où : $T = A x + B$

A et B sont deux constantes que l'on calcule en fonction des conditions aux limites, d'où la solution :

$$T = \frac{T_1 - T_0}{l} x + T_0$$

On obtient une **répartition linéaire des températures**. Les isothermes sont des plans parallèles aux faces du mur.

Remarque : On voit que la répartition de température est indépendante de la valeur du coefficient de conductivité λ , donc indépendante de la nature du matériau qu'il soit conducteur ou isolant.

2.1.1.2 Calcul de la densité de flux de chaleur

On applique la formule générale proposée par Fourier. Il vient :

$$\varphi = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\varphi = \lambda \frac{T_0 - T_1}{l}$$

Remarque : cette formule montre que φ est indépendant de x . Cette propriété est la caractéristique d'un **système à densité de flux conservative**. La densité de flux qui traverse le plan isotherme correspondant à une valeur donnée de x est constante dans toute la traversée du mur.

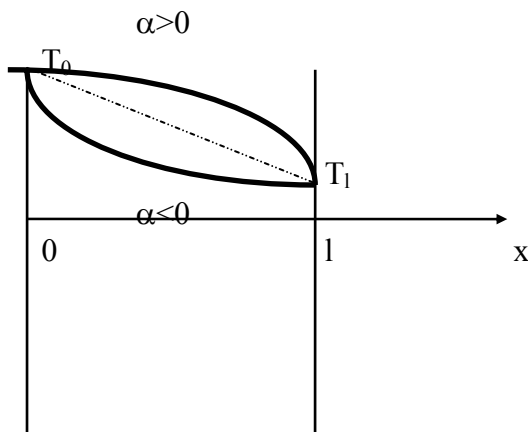
2.1.2 La conductivité du matériau varie avec la température

Pour de nombreux matériaux si le domaine de température n'est pas trop grand, on peut admettre une variation linéaire de λ avec la température.

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha T)$$

2.1.2.1 Détermination du champ de température

La résolution de l'équation de la chaleur donne comme solution une répartition des températures en fonction de x parabolique (figure 2-2)



$$T(x) + \frac{1}{2} \alpha T^2(x) = \frac{T_l - T_0}{l} \left(1 + \alpha \frac{T_l + T_0}{2}\right) x + T_0 + \frac{1}{2} \alpha T_0^2 \quad (2-9)$$

Suivant le signe de α la concavité est dirigée soit vers le haut, soit vers le bas.

2.1.2.2 Détermination de la densité de flux traversant le mur

A partir de la loi de Fourier, on obtient une densité de flux, indépendante de l'abscisse (flux conservatif), donnée par la relation :

$$\varphi = \frac{T_0 - T_l}{l} \lambda_0 \left(1 + \alpha \frac{T_l + T_0}{2}\right)$$

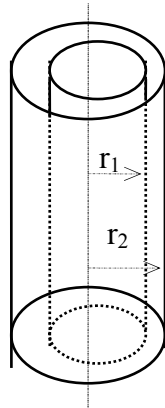
ou encore :

$$\varphi = - (\text{grad } T)_m \cdot \lambda_m$$

où : $(\text{grad } T)_m$ est égal à $\frac{T_l - T_0}{l}$ c'est à dire le gradient moyen de température et λ_m à la valeur moyenne de la conductivité dans l'intervalle (T_0, T_l) .

2.2 PROBLEME DU CYLINDRE

C'est le problème du transfert de chaleur par conduction en régime permanent dans une géométrie cylindrique sans sources internes de chaleur (conduite cylindrique). Soit r_1 et r_2 les rayons intérieur et extérieur.



Conditions aux limites du problème
(Conditions de Dirichlet)

$$r = r_1 \quad T = T_1$$

$$r = r_2 \quad T = T_2$$

Comme dans le paragraphe précédent nous laissons de côté pour l'instant les échanges de chaleur entre le fluide qui circule à l'intérieur du tube et la paroi interne. Nous ne tenons pas compte non plus des échanges extérieurs. Ces phénomènes font intervenir la convection et le rayonnement (conditions aux limites de Fourier). Nous cherchons simplement la répartition de la température dans le tube ($r_1 < r < r_2$) et l'expression du flux de chaleur par mètre de longueur du tube.

2.2.1 Détermination du champ de température

Par raison de symétrie les isothermes sont des cylindres coaxiaux, et la température n'est fonction que du rayon r . S'il n'y a pas de dégagement interne de chaleur ($P = 0$) et si λ est constant, l'équation de la chaleur (équation 2-1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) \end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle est du type :

$$T = \alpha \ln r + \beta$$

α et β sont deux constantes calculées à l'aide des conditions aux limites du problème.

le champ de température est alors donné par l'expression :

$$T = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r + \frac{T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1}$$

Remarque : Comme dans le problème du mur la répartition de température est indépendante de la valeur du coefficient de conductivité λ lorsque celui-ci est constant.

2.2.2 Calcul du flux de chaleur par unité de longueur du tube

Dans le cas du mur en régime permanent le système était à densité de flux conservative. Maintenant **c'est le flux qui se conserve dans la traversée du système**. Donc nous le calculons pour une surface isotherme quelconque de rayon r et pour une longueur unitaire de tube. L'expression de Fourier donne :

$$\Phi = -\lambda 2\pi \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} = 2\pi \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Comme nous l'avons fait dans le cas du mur nous pourrions calculer le flux dans l'hypothèse où λ est fonction de la température. On définirait alors un coefficient moyen λ_m par la formule :

$$\lambda_m = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \lambda dT$$

Φ serait donné par l'équation dans laquelle λ a été remplacé par λ_m

2.3 PROBLEME DE LA SPHERE

Considérons deux sphères concentriques de rayon r_1 et r_2 limitant un volume de matière sans sources internes de chaleur.

Les conditions aux limites du problème sont des conditions de Dirichlet:

$$\begin{aligned} r = r_1 \\ r = r_2 \end{aligned}$$

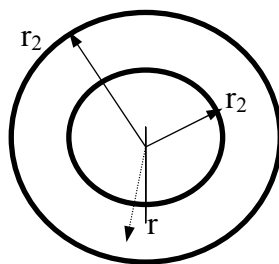
$$\begin{aligned} T = T_1 \\ T = T_2 \end{aligned}$$

L'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

$$\text{ou } \frac{1}{r} \frac{d^2(rT)}{dr^2} = 0$$

ce qui donne après intégration:



$$\frac{d(rT)}{dr} = \alpha$$

d'où
$$T = \frac{\beta}{r} + \alpha$$

les constantes β et α sont calculées avec les conditions aux limites . Il vient :

$$T = \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1) r} + \frac{T_2 r_2 - T_1 r_1}{r_2 - r_1}$$

où

$$T = T_1 + \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right]$$

Comme dans le problème du cylindre **le flux est conservatif** et nous le calculerons pour une isotherme quelconque. Il vient :

$$\Phi = -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_r 4\pi r^2 \quad \text{avec} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\beta}{r^2}$$

$$\text{d'où} \quad \Phi = \lambda 4\pi \beta = 4\pi \lambda \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1}$$

2.4 SYNTHÈSE DES RESULTATS SIGNIFICATIFS (Mur, Cylindre et Sphère)

Cas de référence	Problème « mur »	Problème cylindrique	Problème sphérique
Equation de la chaleur $\Delta T = 0$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = 0$
Solution générale	$T = ax + b$	$T = a \cdot \ln r + b$	$T = a + \frac{b}{r}$

Solution générale de l'équation de la chaleur en régime permanent et conduction morte (a et b sont deux constantes d'intégration)

Cas de référence	Problème « mur »	Problème cylindrique	Problème sphérique
CL du 1 ^{er} type	En $x = x_1 \rightarrow T = T_1$ En $x = x_2 \rightarrow T = T_2$	En $r = r_1 \rightarrow T = T_1$ En $r = r_2 \rightarrow T = T_2$	En $r = r_1 \rightarrow T = T_1$ En $r = r_2 \rightarrow T = T_2$
Calcul des constantes a et b	$a = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}$ $b = \frac{T_2 x_1 - T_1 x_2}{x_1 - x_2}$	$a = \frac{T_1 - T_2}{\ln[r_1 / r_2]}$ $b = \frac{T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2}{\ln[r_1 / r_2]}$	$a = \frac{T_1 r_1 - T_2 r_2}{r_1 - r_2}$ $b = -\frac{[T_1 - T_2] r_1 r_2}{r_1 - r_2}$

Constante d'intégration a et b pour des conditions aux limites de DIRICHLET (1^{er} type)

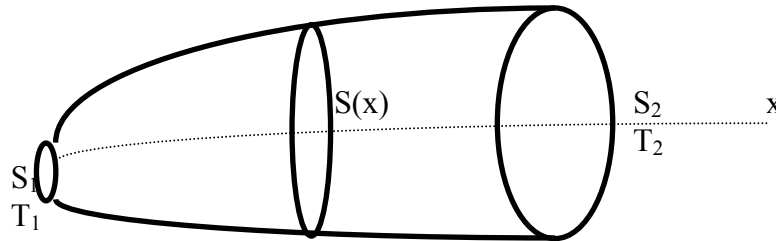
Cas de référence	Problème « mur »	Problème cylindrique	Problème sphérique
Champ de température (solution générale)	$T = ax + b$	$T = a \cdot \ln r + b$	$T = a + \frac{b}{r}$
Isothermes	Plan parallèles aux faces du « mur »	Cylindres concentriques	Sphères concentriques
Lignes de flux	Perpendiculaires aux faces du « mur »	radiales	radiales
GradT	$\frac{\partial T}{\partial x} = a$	$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r}$	$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{b}{r^2}$
Densité de flux conductif $\varphi(x$ ou $r)$ $= -\lambda \cdot [\bar{u} \cdot \text{grad} T]$ en $[W \cdot m^{-2}]$	$\varphi = -\lambda \cdot a =$ $\lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}$ indépendant de x	$\varphi = -\lambda \cdot \frac{a}{r} =$ $\lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln[r_2 / r_1]} \cdot \frac{1}{r}$	$\varphi = -\lambda \cdot \frac{b}{r^2} =$ $\lambda \cdot \frac{[T_1 - T_2] r_1 r_2}{r_2 - r_1} \cdot \frac{1}{r^2}$
Flux conductif à travers une surface S en [W]	S = surface plane isotherme	S = cylindre isotherme de longueur L	S = sphère isotherme
	$\Phi = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} \cdot S$ indépendant de x	$\Phi = 2\pi\lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln[r_2 / r_1]} \cdot L$ indépendant de r	$\Phi = 4\pi\lambda \cdot \frac{[T_1 - T_2] r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ indépendant de r

Définition des isothermes et flux en régime permanent et conduction morte.

2.5 CONDUCTION A TRAVERS PLUSIEURS CORPS PLACES EN SERIE OU PARALLELE

Considérons un tube de flux dans un matériau homogène et isotrope à l'intérieur duquel, existe un gradient de température (figure 2-5). Puisque le flux est conservatif on a pour une surface $S(x)$:

$$\Phi = -\lambda(x)S(x)\left(\frac{dT}{dx}\right)_x$$



où $\left(\frac{dT}{dx}\right)_x$ est la valeur du gradient de température au point considéré. Nous écrivons l'expression précédente sous la forme :

$$\frac{dx}{\lambda(x) S(x)} = -\frac{dT}{\Phi}$$

En intégrant entre les limites précisées sur la figure précédente il vient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x) S(x)} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

Par définition on appellera **résistance thermique** du tube de flux considéré la quantité :

$$R_T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x) S(x)}$$

La **conductance thermique** est définie comme l'inverse de la résistance :

$$K_T = \frac{1}{R_T}$$

On obtient alors :

$$R_T = \frac{1}{K_T} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

Les résistances thermiques s'expriment dans le système d'unité S.I en °C / W. Comparons cette expression à la résistance électrique R_e que l'on définit en électricité à partir de la loi d'Ohm

$$R_e = V / I$$

Si l'on établit une correspondance entre, d'une part le flux de chaleur Φ et le courant électrique I , d'autre part entre la température T et la différence de potentiel V , les formules précédentes sont "analogues". Cette remarque constitue le point de départ des méthodes d'analogie électrique que nous développerons dans la suite de ce cours.

Pour des formes simples comme le mur de dimensions latérales infinies, le cylindre ou la sphère, le calcul de R_T conduit aux expressions déjà trouvées.

2.5.1 Résistance thermique du mur

$$\Phi = \lambda S \frac{\Delta T}{l}$$

ce qui nous donne alors :

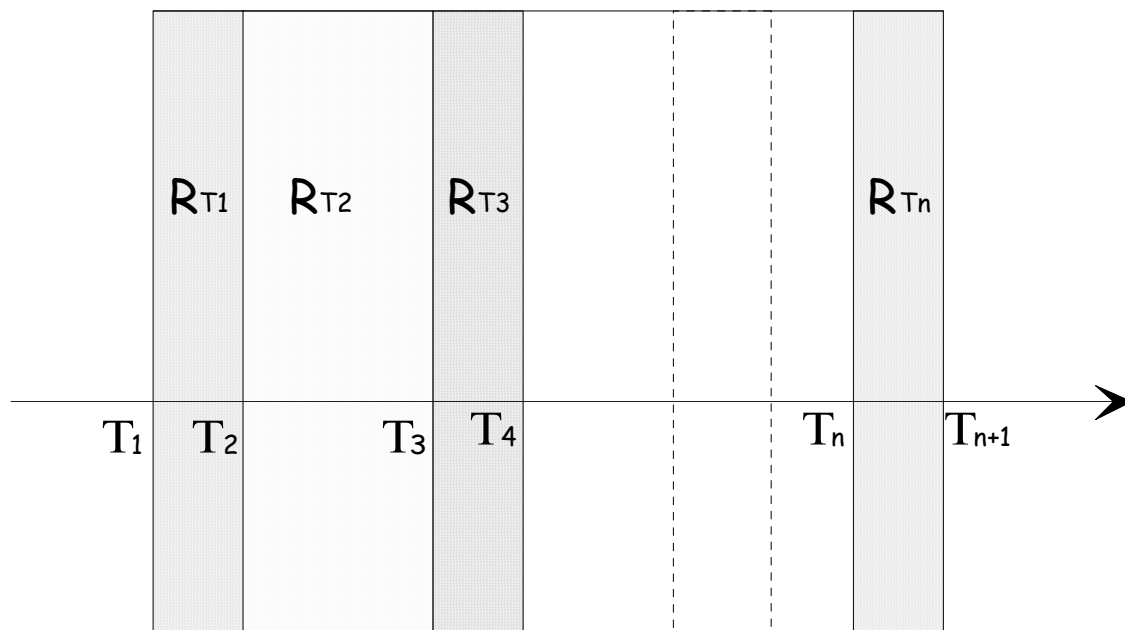
$$R_T, \text{ mur} = \frac{l}{\lambda S} = \rho_T \frac{l}{S}$$

ou ρ_T est appelé la résistivité thermique $\rho_T = \frac{1}{\lambda}$ par analogie avec la résistivité électrique ρ apparaissant dans la formule bien connue $R_e = \rho \frac{l}{S}$ (résistance électrique d'un conducteur de longueur l et de section S).

On définira également une résistance thermique correspondant à une surface unité.

$$r_T = \frac{1}{\lambda} \text{ exprimé en } m^2 \text{ } ^\circ C / W$$

Considérons maintenant plusieurs corps de résistances thermiques R_{T1} , R_{T2} , etc ... placés en série.



S'il existe un gradient de température suivant une normale aux surfaces de séparation, celles-ci coïncideront avec les isothermes $T_1, T_2, T_3 \dots T_{n+1}$. On a, en écrivant que le flux de chaleur est conservatif :

$$\Phi = \frac{1}{R_{T1}} (T_1 - T_2) = \frac{1}{R_{T2}} (T_2 - T_3) = \dots = \frac{1}{R_{Tn-1}} (T_n - T_{n+1})$$

d'où :

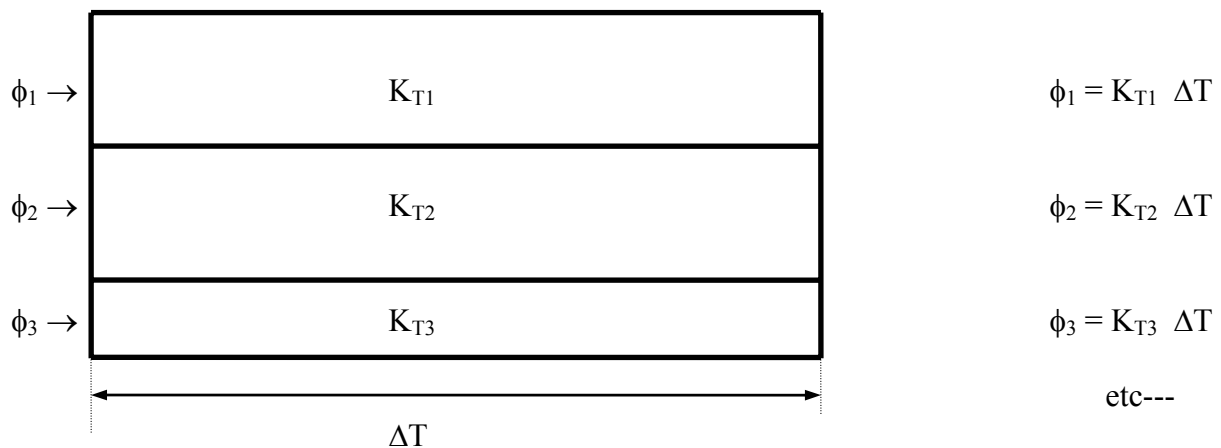
$$\Phi = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R_T}$$

avec

$$R_T = \sum_{i=1}^n R_{Ti}$$

Les corps placés en série ont donc leurs résistances thermiques qui s'ajoutent.

Pour les corps placés en parallèle on a :



Or $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots$

d'où :

$$\phi = \Delta T \sum_{i=1}^n K_{Ti} = \Delta T \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{Ti}}$$

Ce sont les conductances thermiques qui s'ajoutent.

Remarque : Ces problèmes ont de multiples applications techniques : parois multicouches dans le bâtiment, revêtements et isolations de wagons ou chambres frigorifiques, etc... Nous traiterons quelques exemples précis à titre d'exercice.

2.5.2 Résistances thermiques du cylindre et de la sphère

$$\Phi_{\text{cylindre}} = 2 \pi \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\Phi_{\text{sphère}} = 4 \pi \lambda \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1}$$

La comparaison avec la formule de définition de la résistance thermique $R_T = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$ donne :

$$R_T, \text{ cylindre} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \pi \lambda} \text{ (pour une longueur d'unité)}$$

$$R_T, \text{ sphère} = \frac{r_2 - r_1}{4 \pi \lambda r_1 r_2}$$

Comme dans le cas du mur traité précédemment, nous démontrerions que les résistances thermiques de corps cylindriques ou de corps sphériques placés en série s'ajoutent. Les applications techniques sont là aussi importantes. Citons par exemple le calcul de l'isolation thermique de canalisations de transport de fluides caloporteurs ou frigorigènes.

Remarque :

En fait l'expérience montre que lorsque deux matériaux sont au contact les températures des deux faces en regard sont en général différentes. Cela provient soit d'un mauvais contact physique avec interposition d'une couche d'air, soit de la présence d'une pellicule d'oxyde etc... Ces phénomènes ont été déjà invoqués dans le paragraphe traitant des conditions aux limites.

Cette différence de température $T - T'$ peut s'exprimer sous forme d'une résistance thermique de contact ($R_{TC} = \frac{T - T'}{\Phi}$). On connaît mal ces phénomènes qui dépendent de la nature des corps en contact, de la pression mécanique exercée, de l'état de surface. Les mesures directes sont très délicates car il faut pouvoir mesurer directement la différence de température $T - T'$.

Toutefois, en ce qui concerne les matériaux isolants, les corps poreux ou pulvérulents, ces résistances de contact peuvent souvent être négligées. C'est le cas pour la plupart des applications en thermique du bâtiment. Il n'en est pas de même pour des surfaces métalliques en contact où l'état de surface joue un rôle important.

CHAPITRE 3

TRANSMISSION DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME VARIABLE

3.1. Problématique

Résolution

$$\lambda \Delta T + \text{grad } \lambda \cdot \text{grad } T + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

ou encore $\text{div}(\lambda \cdot \text{grad } T) + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$

4 possibilités :

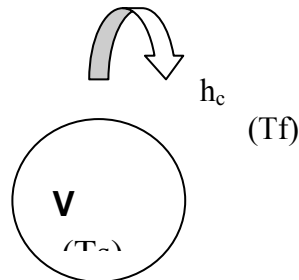
3.1.1. Solide isotherme à tout instant

Volume V

Surface d'échange S

Température solide $T_s(t)$

Température du fluide $T_f(t)$



$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = h_c \cdot S \cdot (T_{\text{fluide}}(t) - T_s(t))$$

3.1.2. Solide non isotherme passant d'un état stable vers un autre

- résolution de l'équation de la chaleur
- recherche d'une solution basée sur la séparation de variable $T(x,t) = X(x) \cdot Y(t)$
- applicable pour des équations aux dérivées partielles
 - linéaires (pas de produit de la variable ou de ses dérivées)
 - homogène (si u est solution ... k.u est solution (k = constante))

Solution générale

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin k_n \bar{x} + B_n \cos k_n \bar{x}) e^{k^2 n \bar{t}}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \\ \bar{x} &= \frac{x}{l} \\ \bar{t} &= a \frac{t}{l^2} \end{aligned} \right\} \text{variables réduites avec } T_i \text{ température initiale}$$

T_{∞} température $t \rightarrow \infty$
 l épaisseur de l'élément
 a diffusivité thermique

3.1.3. Solide en condition périodique

Toutes les grandeurs $T(x)$, $\varphi(x)$... se « répètent » périodiquement

La solution générale est de la forme :

$$T(x,t) = C_1 T_1 + C_2 T_2 + C_3 T_3 + C_4 T_4$$

Avec

$$T_1 = e^{kx} \cdot \cos(wt+kx)$$

$$T_2 = e^{kx} \cdot \sin(wt+kx)$$

$$T_3 = e^{-kx} \cos(wt-kx)$$

$$T_4 = e^{-kx} \sin(wt-kx)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \quad \left| \begin{array}{l} a : \text{diffusivité thermique} \\ w : \text{pulsation } (= \frac{2\pi}{T}) \\ T : \text{période de phénomène} \end{array} \right.$$

3.1.4. Régime variable quelconque

Deux approches similaires (voire identique)

Méthode des volumes finis (R + C) (ou méthode analogique)

Discrétisation de l'équation de la chaleur par un développement en série de TAYLOR Méthode Différences finies

3.2 METHODES ANALOGIQUES

3.2.1 Principe

L'idée de base consiste à rechercher un procédé expérimental commode pour résoudre au laboratoire des problèmes qui par le calcul peuvent devenir lourds. Il faut donc trouver un phénomène physique qui se prête à des mesures expérimentales simples et précises et qui illustre l'équation aux dérivées partielles étudiée et qui traduit les conditions aux limites imposées.

Il existe plusieurs analogies possibles. Nous citerons l'analogie hydraulique peu employée pour résoudre les problèmes de thermique et l'analogie électrique. C'est la seule que nous étudierons ici.

3.2.2 Analogie électrique

Nous remplaçons la fonction température par une fonction plus facilement mesurable : le potentiel électrique.

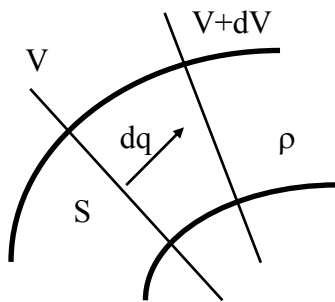


figure 4-1

Considérons un tube de courant tracé dans un matériau conducteur de l'électricité de résistivité électrique ρ . La quantité d'électricité dq traversant une section S du tube de courant pendant l'intervalle de temps dt est donnée par :

$$dq = I dt \quad (4-1)$$

où I est l'intensité du courant. La section S est une équipotentielle correspondant à la valeur V du potentiel électrique. On peut écrire :

$$dq = I dt = \frac{dV}{dR} dt \quad (4-2)$$

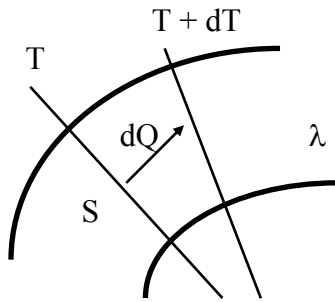
où dV est la variation de potentiel entre les deux équipotentielles V et $V + dV$ et dR la résistance du volume de section S et de longueur dl (voir figure 4-1). On a :

$$dR = \rho \frac{dl}{S}$$

d'où :

$$dq = \frac{1}{\rho} \frac{dV}{dl} S dt \quad (4-3)$$

Soit maintenant un tube de flux de chaleur tracé dans un matériau de conductivité λ . Coupons ce tube de flux par deux isothermes de températures respectives T et $T + dT$.



Nous délimitons ainsi un volume $S dl$. La quantité de chaleur dQ traversant la surface S pendant l'intervalle de temps dt est par définition donnée par la formule:

$$dQ = \Phi dt$$

Φ flux de chaleur

Par application de la loi de Fourier, on a :

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dl} S$$

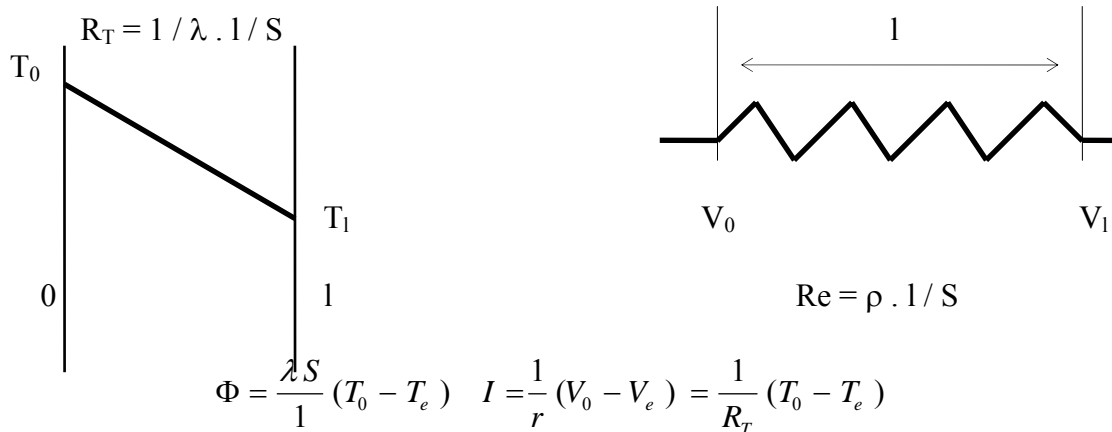
d'où

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dl} S dt$$

Si on compare ces formules on voit apparaître une analogie de formules, en faisant correspondre d'une part le flux de chaleur à l'intensité électrique, d'autre part le potentiel électrique et la température. En d'autres termes, les lignes d'égal potentiel dans un champ électrique correspondent aux lignes isothermes dans un champ de flux de chaleur, les lignes de courant électrique correspondant aux lignes de flux de chaleur.

On a déjà vu cette analogie en régime permanent en comparant le transfert de chaleur dans un mur et l'écoulement d'un courant électrique dans une résistance.

en thermique
en électricité



Remarque :

Cette analogie est une analogie toute formelle ; En effet, en électricité, les résistances électriques varient dans des limites très larges (rapports pouvant atteindre 10^{15}) alors qu'en thermique, les résistances thermiques varient beaucoup moins (maximum 10^4)

3.2.3 Analogie électrique en régime variable

Dans tout ce qui précède nous avons travaillé en régime permanent des températures. En régime transitoire le problème se complique beaucoup. Il faut en effet simuler des systèmes à flux non conservatif (le flux de chaleur varie en fonction du temps). L'analogie

impose l'introduction dans le circuit de capacités ou de selfs de manière à considérer des courants variables. La complexité technologique des montages expérimentaux limite alors beaucoup l'utilisation de cette méthode.

3.3 METHODES NUMERIQUES

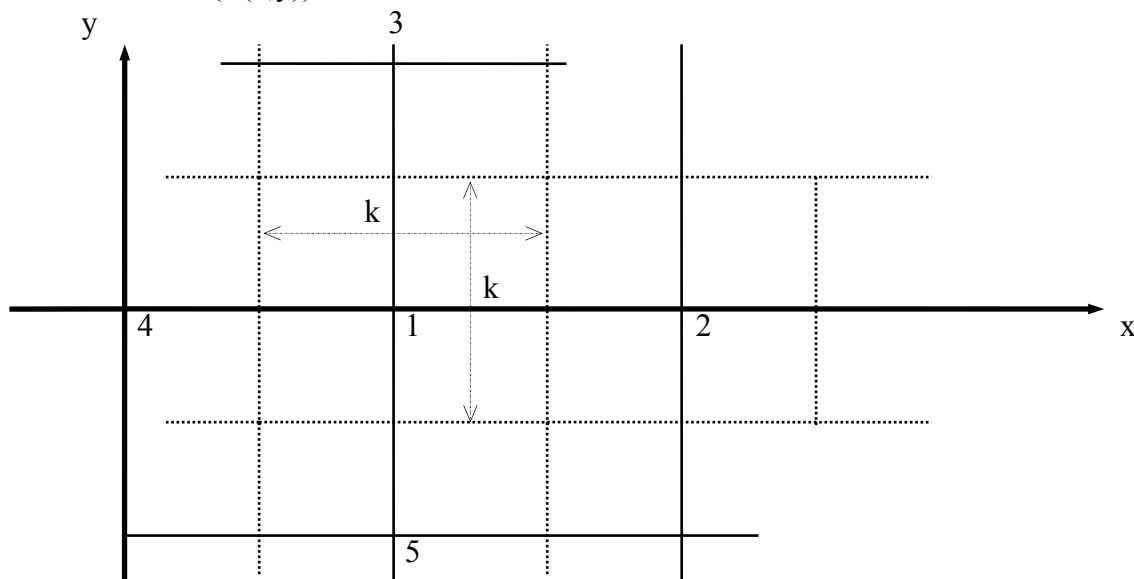
Nous ne décrivons ici que la méthode des différences finies.

3.3.1 Principe

On transforme en tout point et à chaque instant l'équation de la chaleur et les conditions aux limites spatio-temporelles par des équations algébriques qui donnent une approximation du problème. On obtient ce résultat en remplaçant le domaine continu par un modèle discontinu de points, et les dérivées partielles par des différences finies.

3.3.2 Résolution de l'équation de Laplace en régime permanent des températures

Nous traitons ici l'établissement du système d'équations linéaires relatif à un système à deux dimensions ($T(x,y)$).



A l'intérieur du réseau considérons un noeud numéroté 1 et ses voisins immédiats numérotés 2, 3, 4, 5. Soient k les distances de ces points. Utilisons les développements limités pour calculer en fonction de T_1 (température du noeud 1) les températures T_2, T_3, T_4, T_5 .

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= T_1 + k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + etc.... \\ T_3 &= T_1 + k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + etc.... \\ T_4 &= T_1 - k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + etc.... \\ T_5 &= T_1 - k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + etc.... \end{aligned} \right\}$$

En additionnant les 4 équations , il vient :

$$T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 4 T_1 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) k^2$$

Or : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ équation de Laplace

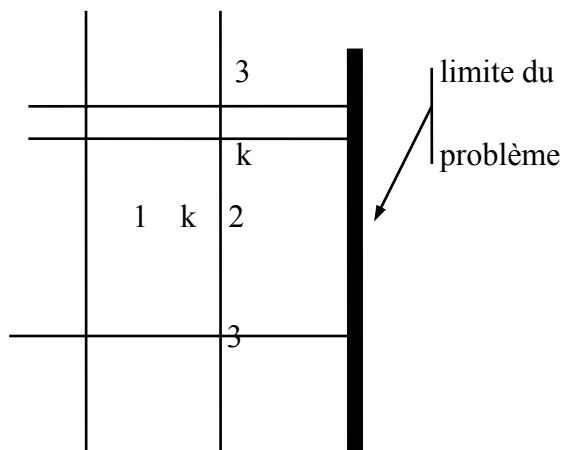
d'où : $T_2 + T_3 + T_4 + T_5 - 4 T_1 = 0$

On pourra écrire en chaque noeud du réseau une relation de ce type. On aura donc remplacé l'équation de Laplace par un système d'équations algébriques.

Etablissement des conditions aux limites :

- Dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet (Températures connues sur la frontière) il n'y a pas de problème particulier. Dans toutes les équations algébriques où apparaissent des noeuds situés sur une limite, les températures de ces noeuds seront des données du problème.

- Dans le cas de conditions aux limites de Fourier on procède comme suit :



$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_2 = h (T_2 - T_0)$$

avec $T_1 = T_2 - \Delta x \left(\frac{dT}{dx} \right)_2 + \dots$

d'où $\left(\frac{dT}{dx} \right)_2 = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}$

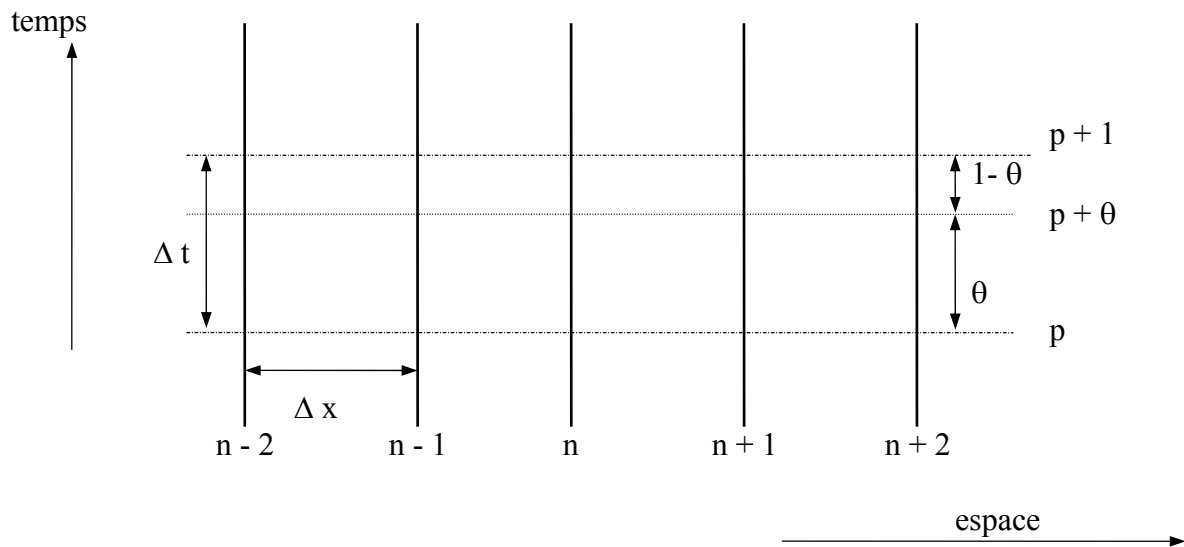
$\lambda \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = h (T_2 - T_0)$ que l'on écrit :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} T_1 - \left(\frac{\lambda}{\Delta x} + h \right) T_2 = -h T_0$$

3.3.3 Résolution de l'équation de la chaleur en régime variable

Soit à résoudre l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$a \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$



Choisissons un pas d'espace Δx et un pas sur le temps Δt , et plaçons nous à un instant intermédiaire défini par $p + \theta$ ($0 \leq \theta \leq 1$). Il vient :

$$T_{n+1}^{p+\theta} = T_n^{p+\theta} + \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_n^{p+\theta} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_n^{p+\theta} + \dots$$

$$T_{n-1}^{p+\theta} = T_n^{p+\theta} - \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_n^{p+\theta} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_n^{p+\theta} + \dots$$

$$d'où \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_n^{p+\theta} = \frac{T_{n+1}^{p+\theta} + T_{n-1}^{p+\theta} - 2T_n^{p+\theta}}{\Delta x^2}$$

Pour le plan numéroté n la discrétisation dans le temps fournit :

$$T_n^{p+1} = T_n^{p+\theta} + \Delta t (1 - \theta) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_n^{p+\theta} + \dots$$

$$T_n^p = T_n^{p+\theta} - \Delta t \theta \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_n^{p+\theta} + \dots$$

$$d'où \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_n^{p+\theta} = \frac{1}{\Delta t} (T_n^{p+1} - T_n^p)$$

De ces équations on obtient :

$$T_n^{p+\theta} = \vartheta T_n^{p+1} + (1 - \vartheta) T_n^p$$

et de la même manière en généralisant pour les plans $n+1$ et $n-1$:

$$T_{n+1}^{p+\theta} = \theta T_{n+1}^{p+1} + (1-\theta) T_{n+1}^p$$

$$T_{n-1}^{p+\theta} = \theta T_{n-1}^{p+1} + (1-\theta) T_{n-1}^p$$

En reportant les expressions de $T_n^{p+\theta}$, $T_{n+1}^{p+\theta}$ et $T_{n-1}^{p+\theta}$ et en écrivant l'équation de la chaleur au plan n et à l'instant p + θ , il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{a\theta}{\Delta x^2} (T_{n+1}^{p+1} + T_{n-1}^{p+1} - 2T_n^{p+1}) + \frac{a(1-\theta)}{\Delta x^2} (T_{n+1}^p + T_{n-1}^p - 2T_n^p) \\ & = \frac{1}{\Delta t} (T_n^{p+1} - T_n^p) \end{aligned}$$

En posant $M = \frac{\Delta x^2}{a \Delta t}$ on a :

$$T_n^{p+1} - T_n^p = \frac{\theta}{M} (T_{n+1}^{p+1} + T_{n-1}^{p+1} - 2T_n^{p+1}) + \frac{1-\theta}{M} (T_{n+1}^p + T_{n-1}^p - 2T_n^p)$$

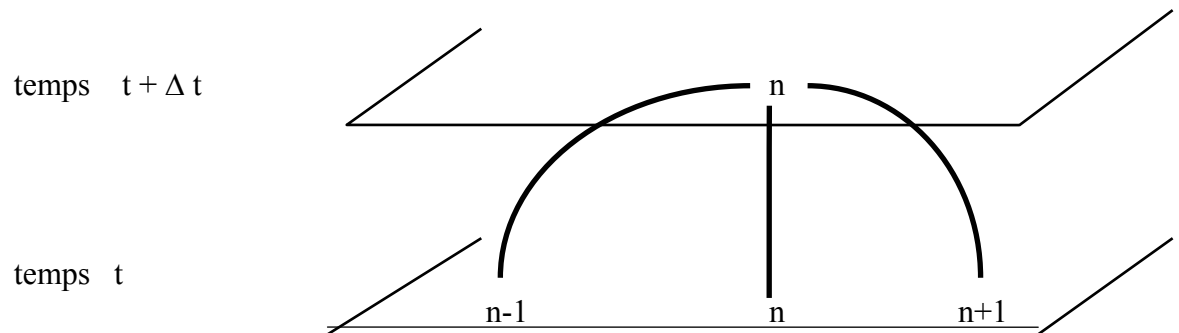
Suivant les valeurs prises par le coefficient θ on obtient plusieurs schémas types de différences finies.

3.3.3.1 $\theta = 0$: schéma dit explicite

Pour $\theta=0$, on obtient :

$$T_n^{p+1} = \left(1 - \frac{2}{M}\right) T_n^p + \frac{1}{M} (T_{n+1}^p + T_{n-1}^p)$$

Ce schéma est dit explicite car à chaque instant la température en tout point est calculable en fonction de la répartition de température à l'instant précédent.



Remarques :

- La valeur de M est déterminée par le choix de Δx et Δt . Ces deux valeurs sont indépendantes. Toutefois il faut les choisir de manière à ce que le coefficient $1 - \frac{2}{M}$ soit positif (c'est-à-dire $M > 2$) pour que la méthode numérique converge.

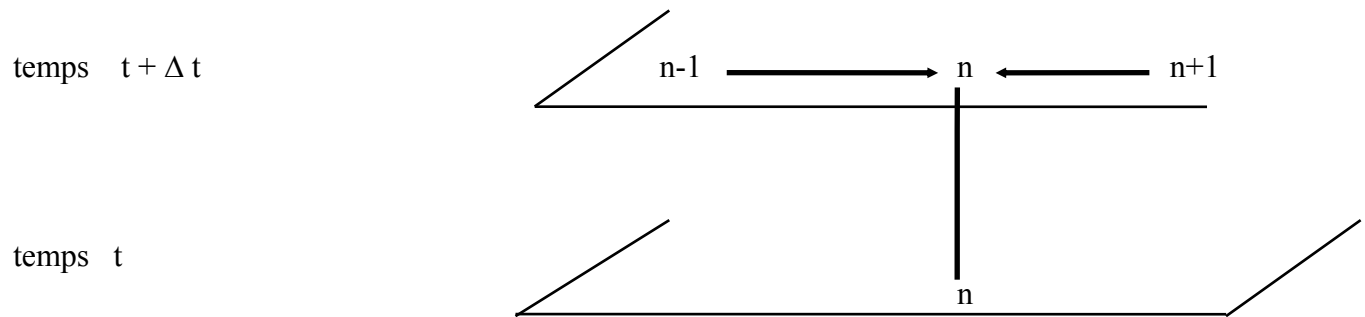
- Dans le cas particulier où $M = 2$ la formule précédente devient :

$$T_n^{p+1} = \frac{T_{n+1}^p + T_{n-1}^p}{2}$$

3.3.3.2 $\theta = 1$ Schéma dit implicite

Pour $\theta=1$ on obtient :

$$T_n^p = -\frac{1}{M} (T_{n+1}^{p+1} + T_{n-1}^{p+1}) + T_n^{p+1} \left(1 + \frac{2}{M}\right)$$



Dans ce cas la température à l'instant $t + \Delta t$ n'est plus explicitement calculable en fonction des températures à l'instant t . Contrairement à la méthode explicite, la méthode implicite est toujours convergente.

3.3.3.3 $\theta = \frac{1}{2}$ Schéma de Crank-Nicolson

Il vient :

$$T_n^{p+1} - \frac{1}{2M} (T_{n+1}^{p+1} + T_{n-1}^{p+1} - 2T_n^{p+1}) = T_n^p + \frac{1}{2M} (T_{n+1}^p + T_{n-1}^p - 2T_n^p)$$

Ce schéma est implicite comme le précédent. Il ne présente pas non plus de condition de convergence.