

$$a(s) = \frac{v_o}{v_x} = g_{m1} \cdot \frac{(-C_2 \cdot C_c \cdot s^2 + g_{m3} \cdot g_{m2})}{\left[(s^2 \cdot C_2 \cdot C_L \cdot C_1 + s^2 \cdot C_2 \cdot C_L \cdot C_c + s \cdot C_2 \cdot C_L \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_2 \cdot C_c \cdot C_1 + s \cdot C_2 \cdot C_c \cdot g_{m3} + g_{m3} \cdot g_{m2} \cdot C_c) \cdot s \right]}$$

$$a(s) = \frac{g_{m1} \cdot g_{m2} \cdot g_{m3}}{s} \cdot \frac{1 - s^2 \cdot \frac{C_c \cdot C_2}{g_{m2} \cdot g_{m3}}}{s^2 \cdot (C_2 \cdot C_L \cdot C_1 + C_2 \cdot C_L \cdot C_c + C_2 \cdot C_c \cdot C_1) + s \cdot (C_2 \cdot C_L \cdot g_{m3} + C_2 \cdot C_c \cdot g_{m3}) + g_{m3} \cdot g_{m2} \cdot C_c}$$

$$a(s) = \frac{g_{m1}}{2 \cdot C_c} \cdot \frac{1}{s^2 \cdot \frac{C_2 \cdot C_L \cdot C_1 + C_2 \cdot C_L \cdot C_c + C_2 \cdot C_c \cdot C_1}{C_c \cdot g_{m2} \cdot g_{m3}} + s \cdot \frac{C_2 \cdot C_L + C_c}{C_c} \cdot \frac{1}{g_{m2}} + 1}$$

poles:

Given

$$s^2 \cdot \left(\frac{C_2 \cdot C_L \cdot C_1 + C_2 \cdot C_L \cdot C_c + C_2 \cdot C_c \cdot C_1}{C_c \cdot g_{m2} \cdot g_{m3}} \right) + s \cdot \left(\frac{C_2 \cdot C_L + C_c}{C_c} \cdot \frac{1}{g_{m2}} \right) + 1 = 0$$

$$\text{Find}(s) \rightarrow \left[\frac{1}{2 \cdot (C_2 \cdot C_L \cdot C_1 + C_2 \cdot C_L \cdot C_c + C_2 \cdot C_c \cdot C_1)} \right] \left[-C_2 \cdot g_{m3} \cdot C_c - C_2 \cdot g_{m3} \cdot C_L + (C_2^2 \cdot g_{m3}^2 \cdot C_c^2 + 2 \cdot C_2^2 \cdot g_{m3}^2 \cdot C_c \cdot C_L + C_2^2 \cdot g_{m3}^2 \cdot C_c \cdot C_L) \right]$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -\omega_n \cdot (1 + \sqrt{D})$$

$$p_2 = -\omega_n \cdot (1 - \sqrt{D})$$

$$\omega_n = \frac{C_2 \cdot g_{m3} \cdot (C_L + C_c)}{2 \cdot (C_2 \cdot C_L \cdot C_1 + C_2 \cdot C_L \cdot C_c + C_2 \cdot C_c \cdot C_1)} = \frac{g_{m3} \cdot (C_L + C_c)}{2 \cdot [C_L \cdot (C_1 + C_c) + C_c \cdot C_1]} \quad \text{approximation} \quad C_1 < \blacksquare < C_c, C_L$$

$$\omega_n = \frac{g_{m3} \cdot (C_L + C_c)}{2 \cdot (C_L \cdot C_c + C_c \cdot C_1)} = \frac{g_{m3} \cdot (C_L + C_c)}{2 \cdot C_c \cdot C_L} = \frac{g_{m3}}{2 \cdot C_c} \cdot \left(1 + \frac{C_c}{C_L} \right)$$

$$D = \frac{C_2^2 \cdot C_L^2 \cdot g_{m3}^2 + 2 \cdot C_2^2 \cdot C_L \cdot g_{m3}^2 \cdot C_c + C_2^2 \cdot C_c^2 \cdot g_{m3}^2 - 4 \cdot C_c \cdot g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_2 \cdot C_L \cdot C_1 - 4 \cdot C_c^2 \cdot g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_2 \cdot C_L - 4 \cdot C_c^2 \cdot g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_2 \cdot C_1}{2 \cdot (C_2 \cdot C_L \cdot C_1 + C_2 \cdot C_L \cdot C_c + C_2 \cdot C_c \cdot C_1)}$$

$$a(s) = \frac{g_{m1}}{s \cdot C_c} \cdot \frac{1 - \frac{s^2}{z^2}}{\left(1 - \frac{s}{p_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{s}{p_2} \right)}$$

- real zeros at +/- z (phase cancels)
- pole at zero
- poles p1, p2 (usually close or complex conjugates)

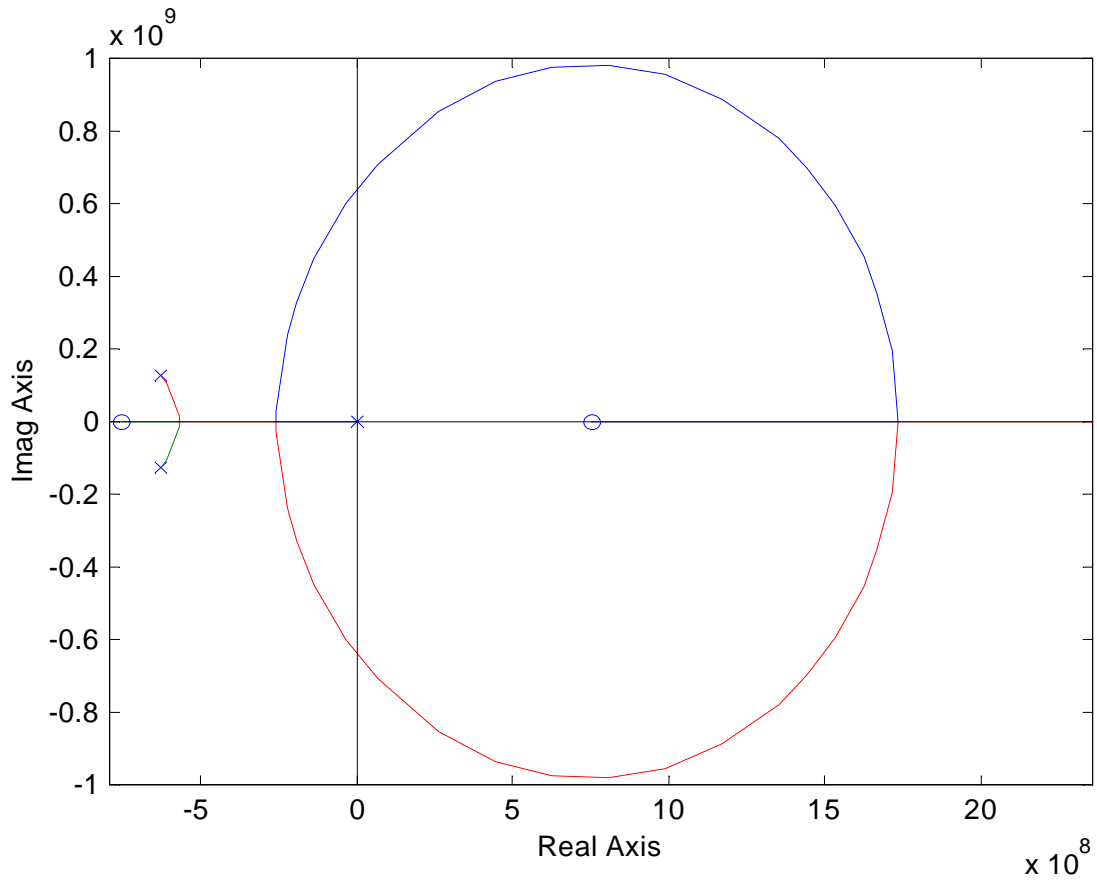
$$\omega_n = \frac{g_{m3}}{2 \cdot C_c} \cdot \left(1 + \frac{C_c}{C_L} \right)$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{g_{m2} \cdot g_{m3}}{C_2 \cdot C_c}}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{g_{m2} \cdot g_{m3}}{C_2 \cdot C_c}}$$

phase lag from RHP zero cancelled by lead from LHP zero

Root Locus



Closed-Loop Analysis ($k=g_{m1}$)

Given

$$v_x \cdot C_{Tx} - v_o \cdot C_f = 0$$

$$v_y \cdot s \cdot (C_1 + C_c) + v_y \cdot g_{m3} - v_o \cdot s \cdot C_c - i_t = 0$$

$$v_z \cdot s \cdot C_2 - v_y \cdot g_{m3} = 0$$

$$v_o \cdot s \cdot C_{To} - v_y \cdot s \cdot C_c - v_x \cdot s \cdot C_f + g_{m2} \cdot v_z = 0$$

Note: strictly this is a multi-loop feedback circuit and the Bode criterion (for establishing stability) does not apply.

Find(v_x, v_y, v_z, v_o) \rightarrow

$$\begin{bmatrix} -i_t \cdot \frac{1}{\left[(-s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_1 - s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_c - s \cdot C_2\right]} \\ -s \cdot C_2 \cdot i_t \cdot \frac{1}{\left(-s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_1 - s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_c -\right)} \\ -i_t \cdot \frac{1}{\left(-s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_1 - s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_c - s \cdot C_2\right)} \\ -i_t \cdot C_{Tx} \cdot \frac{1}{\left[(-s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_1 - s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_c -\right]} \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{i_r}{i_t} = \frac{g_{m1} \cdot v_x}{i_t}$$

$$T = g_{m1} \cdot \frac{\left(-C_2 \cdot C_c \cdot s^2 + g_{m2} \cdot g_{m3}\right)}{\left[\left(s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_1 + s^2 \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_c + s \cdot C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot g_{m3} - s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_1 - s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_c - s \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot g_{m3} - s^2 \cdot C_c^2 \cdot C_{Tx} \cdot C_2\right)\right]}$$

$$a = C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_1 + C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot C_c - C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_1 - C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_c - C_c^2 \cdot C_{Tx} \cdot C_2$$

$$a = C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot (C_1 + C_c) - C_2 \cdot C_f^2 \cdot (C_1 + C_c) - C_c^2 \cdot C_{Tx} \cdot C_2$$

assume $C_1 \ll C_c$

$$a = C_2 \cdot C_c \cdot (C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2 - C_c \cdot C_{Tx})$$

$$b = C_2 \cdot C_{To} \cdot C_{Tx} \cdot g_{m3} - C_2 \cdot C_f^2 \cdot g_{m3} = g_{m3} \cdot C_2 \cdot (C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2)$$

$$c = g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_{Tx} \cdot C_c$$

$$T = \frac{F \cdot \omega_u}{s} \cdot \frac{\left(1 - \frac{s}{z_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{z_2}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{p_3}\right)}$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -\omega_n \cdot (1 + \sqrt{D})$$

$$p_3 = -\omega_n \cdot (1 - \sqrt{D})$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{g_{m2} \cdot g_{m3}}{C_2 \cdot C_c}}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{g_{m2} \cdot g_{m3}}{C_2 \cdot C_c}}$$

$$\omega_n = \frac{b}{2 \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_{m3} \cdot C_2 \cdot (C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2)}{C_2 \cdot C_c \cdot (C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2 - C_c \cdot C_{Tx})} = \frac{g_{m3}}{2 \cdot C_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C_c \cdot C_{Tx}}{C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2}} = \frac{g_{m3}}{2 \cdot C_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f}}$$

$$\omega_n = \frac{g_{m3}}{2 \cdot C_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f}}$$

$$D = 1 - \frac{4a \cdot c}{b^2} = 1 - \frac{4 \cdot C_2 \cdot C_c \cdot (C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2 - C_c \cdot C_{Tx}) \cdot g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_{Tx} \cdot C_c}{\left[g_{m3} \cdot C_2 \cdot (C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2)\right]^2} = 1 - 4 \cdot \frac{g_{m2}}{g_{m3}} \cdot \frac{C_c}{C_2} \cdot \frac{C_c \cdot C_{Tx}}{C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2} \cdot \left(1 - \frac{C_c \cdot C_{Tx}}{C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2}\right)$$

$$D = 1 - 4 \cdot \frac{g_{m2}}{g_{m3}} \cdot \frac{C_c}{C_2} \cdot \frac{C_c \cdot C_{Tx}}{C_{To} \cdot C_{Tx} - C_f^2} \cdot \left(1 - \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f}\right)$$

Example:closed-loop gain: $c := 2$

devices: $g_{m1} := 1\text{mS}$ $g_{m2} := 3\text{mS}$ $g_{m3} := 1.2\text{mS}$
 $\omega_{T1} := 0.5\cdot\text{GHz}\cdot 2\cdot\pi$ $\omega_{T2} := 2\cdot\omega_{T1}$ $\omega_{T3} := 2\cdot\omega_{T1}$
 $C_i := \frac{g_{m1}}{\omega_{T1}}$ $C_2 := \frac{g_{m2}}{\omega_{T2}}$ $C_1 := \frac{g_{m3}}{\omega_{T3}}$
 $C_i = 318.31\text{ fF}$ $C_2 = 477.465\text{ fF}$ $C_1 = 190.986\text{ fF}$

feedback network: $C_s := C_i$ $C_s = 318.31\text{ fF}$
 $C_f := \frac{C_2}{c}$ $C_f = 238.732\text{ fF}$

load and compensation: $C_L := 1\text{pF}$
 $C_c := 1.2\cdot\frac{g_{m1}}{g_{m2}}\cdot C_L$ $C_c = 400\text{ fF}$

shorthands: $C_{Tx} := C_s + C_f + C_i$ $C_{Tx} = 875.352\text{ fF}$
 $C_{To} := C_L + C_c + C_f$ $C_{To} = 1.639 \times 10^3\text{ fF}$
 $F := \frac{C_f}{C_{Tx}}$ $F = 0.273$
 $\omega_u := \frac{g_{m1}}{C_c}$ $\frac{\omega_u}{2\cdot\pi} = 397.887\text{ MHz}$

Solution:

$$T = \frac{F \cdot \omega_u}{s} \cdot \frac{\left(1 - \frac{s}{z_1}\right) \left(1 - \frac{s}{z_2}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_2}\right) \left(1 - \frac{s}{p_3}\right)} = \frac{F \cdot \omega_u}{s} \cdot \frac{\left(1 - \frac{s}{z_1}\right) \left(1 - \frac{s}{z_2}\right)}{1 + \frac{s}{Q \cdot \omega_r} + \frac{s^2}{\omega_r^2}}$$

$$\frac{\omega_u}{2\pi} = 397.887\text{ MHz}$$

$$\frac{F \cdot \omega_u}{2\pi} = 108.515\text{ MHz}$$

$$z_1 := \sqrt{\frac{g_{m2} \cdot g_{m3}}{C_c \cdot C_2}}$$

$$\frac{z_1}{2\pi} = 690.988\text{ MHz}$$

$$z_2 := -\sqrt{\frac{g_{m2} \cdot g_{m3}}{C_c \cdot C_2}}$$

$$\frac{z_2}{2\pi} = -690.988\text{ MHz}$$

$$\omega_n := \frac{g_{m3}}{2 \cdot C_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f}}$$

$$\frac{\omega_n}{2\pi} = 320.098\text{ MHz}$$

$$D := \left[1 - 4 \cdot \frac{g_{m2}}{g_{m3}} \cdot \frac{C_c}{C_2} \cdot \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f} \cdot \left(1 - \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f} \right) \right]$$

$$D = -0.588$$

$$p_2 := -\omega_n \cdot (1 + \sqrt{D})$$

$$\frac{p_2}{2\pi} = -320.098 - 245.497i \text{ MHz}$$

$$p_3 := -\omega_n \cdot (1 - \sqrt{D})$$

$$\frac{p_3}{2\pi} = -320.098 + 245.497i \text{ MHz}$$

$$p(s) := \arg \left[\left(1 - \frac{s}{p_2} \right) \left(1 - \frac{s}{p_3} \right) \right]$$

$$p(j \cdot F \cdot \omega_u) = 24.712 \text{ deg}$$

$$\Phi_m(s) := \frac{\pi}{2} - p(s)$$

Phase margin

$$\Phi_m(j \cdot F \cdot \omega_u) = 65.288 \text{ deg}$$

Design Considerations

Closed-loop bandwidth:

$$\omega_{3dB} := F \cdot \omega_u$$

Nondominant pole frequencies (real part only):

$$\omega_n := \frac{g_{m3}}{2 \cdot C_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f}}$$

For 60 deg phase margin $K=2$ (approximate):
 Factor 2 since there are two nondominant poles)

$$\omega_n = 2 \cdot K \cdot \omega_{3dB}$$

$$2 \cdot K \cdot F \cdot \frac{g_{m1}}{C_c} = \frac{g_{m3}}{2 \cdot C_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f}}$$

$$K := \frac{1}{4 \cdot F} \cdot \frac{g_{m3}}{g_{m1}} \cdot \frac{F \cdot C_f - C_{To}}{F \cdot C_f - C_{To} + C_c}$$

$$K := \frac{1}{4 \cdot F} \cdot \frac{g_{m3}}{g_{m1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C_c}{C_{To} - F \cdot C_f}}$$

$$K = 1.475$$

Increasing K increases the phase margin.

$$L^2 - 4 \cdot g_{m3} \cdot g_{m2} \cdot C_c \cdot C_2 \cdot C_L \cdot C_1 - 4 \cdot g_{m3} \cdot g_{m2} \cdot C_c^2 \cdot C_2 \cdot C_L - 4 \cdot g_{m3} \cdot g_{m2} \cdot C_c^2 \cdot C_2 \cdot C_1 \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{1}{2 \cdot (C_2 \cdot C_L \cdot C_1 + C_2 \cdot C_L \cdot C_c + C_2 \cdot C_c \cdot C_1)} \right] \left[-C_2 \cdot g_n \right]$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{(s^2 \cdot C_c \cdot C_2 - g_{m3} \cdot g_{m2})}{s \cdot C_{T0} \cdot C_{Tx} \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_1 + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_c + s \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_c^2 \cdot C_{Tx} \cdot C_2 - g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_{Tx} \cdot C_c} \cdot C_f \\
 & \frac{(C_{T0} \cdot C_{Tx} - C_f^2)}{s \cdot C_2 \cdot C_{T0} \cdot C_{Tx} \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_1 + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_c + s \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_c^2 \cdot C_{Tx} \cdot C_2 - g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_{Tx} \cdot C_c} \\
 & \frac{(C_{T0} \cdot C_{Tx} - C_f^2)}{s \cdot C_{T0} \cdot C_{Tx} \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_1 + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_c + s \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_c^2 \cdot C_{Tx} \cdot C_2 - g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_{Tx} \cdot C_c} \cdot g_{m3} \\
 & \frac{(s^2 \cdot C_c \cdot C_2 - g_{m3} \cdot g_{m2})}{s \cdot C_2 \cdot C_{T0} \cdot C_{Tx} \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_1 + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_c + s \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_c^2 \cdot C_{Tx} \cdot C_2 - g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_{Tx} \cdot C_c} \cdot s
 \end{aligned} \right]$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{C_f}{s \cdot C_2 \cdot C_{T0} \cdot C_{Tx} \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_1 + s^2 \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot C_c + s \cdot C_2 \cdot C_f^2 \cdot g_{m3} + s^2 \cdot C_c^2 \cdot C_{Tx} \cdot C_2 - g_{m2} \cdot g_{m3} \cdot C_{Tx} \cdot C_c} \cdot s
 \end{aligned} \right]$$

$$s^3 \cdot C_c - C_2 \cdot g_{m3} \cdot C_L - \left(C_2^2 \cdot g_{m3}^2 \cdot C_c^2 + 2 \cdot C_2^2 \cdot g_{m3}^2 \cdot C_c \cdot C_L + C_2^2 \cdot g_{m3}^2 \cdot C_L^2 - 4 \cdot g_{m3} \cdot g_{m2} \cdot C_c \cdot C_2 \cdot C_L \cdot C_1 - 4 \cdot g_{m3} \cdot g_{m2} \cdot C_c^2 \cdot C_2 \cdot C_L - 4 \cdot g_{m3} \cdot g_{m2} \right)$$

$$2 \cdot C_c^2 \cdot C_2 \cdot C_1 \left(\frac{1}{2} \right) \left] \right]$$