

Densité spectrale de bruit

3.1 - Introduction

les caractérisations spatiales ou temporelles ne sont pas suffisantes pour caractériser un bruit. Afin de connaître les propriétés d'un bruit, il faut également étudier son **spectre**, c'est à dire en faire une analyse dans le **domaine fréquentiel**.

3.2 - Définition de la densité spectrale

3.2.1 - Introduction

Lorsque l'on écoute un disque ancien sur une chaîne HiFi, on entend un bruit de fond très important. L'interposition dans la chaîne d'amplification d'un **filtre** passe-bas, se traduit par une sensation auditive beaucoup plus agréable. Cet exemple simple, permet de constater que le filtrage agit sur l'observation du bruit.

Afin de quantifier cet effet, il faut connaître la **répartition spectrale du bruit**. Celui-ci étant de nature aléatoire, on s'intéressera à ses propriétés moyennes sur un intervalle de temps long par rapport à sa fluctuation.

La **transformée de Fourier** est l'outil mathématique qui permet de déterminer le spectre d'une fonction $X(t)$ de période T . La formulation de passage est donnée dans le paragraphe 1.5.

Cependant, la transformée de *Fourier* ne s'applique qu'aux fonctions bornées, et par conséquent, nous ne pouvons pas calculer le spectre d'une fonction aléatoire qui d'une façon générale n'est pas bornée. Par contre, il est possible d'appliquer la transformée de *Fourier* sur la **fonction d'autocorrélation** qui est **bornée**.

3.2.2 - Théorème de Wiener-Khintchine

Le théorème de *Wiener-Khintchine* consiste à évaluer la transformée de *Fourier* $S_X(f)$ de la fonction d'autocorrélation $C_{XX}(\tau)$ qui est appelée « **densité spectrale de bruit** » :

$$S_X(\nu) = \text{TF}[C_{XX}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{XX}(\tau) \cdot \exp(-j.2.\pi.\nu.\tau) \cdot d\tau \quad (3.1)$$

— ν : est la fréquence mathématique définie de $-\infty$ à $+\infty$.

En utilisant la transformée de *Fourier* inverse, nous avons également :

$$C_{XX}(\tau) = \text{TF}^{-1}[S_X(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \cdot \exp(j.2.\pi.\nu.\tau) \cdot d\nu \quad (3.2)$$

Utilisons les résultats du paragraphe 2.5.2.2 :

$$C_{XX}(\tau) = C_{XX}(-\tau) \quad (3.3)$$

$$C_{XX}(0) = X_{eff}^2 \quad (3.4)$$

Compte tenu des relations (3.1) et (3.3), nous avons :

$$S_X(\nu) = S_X(-\nu) \quad (3.5)$$

Tout comme la fonction d'autocorrélation, la **densité spectrale** de bruit est une fonction **réelle et paire**.

Le report des relations (3.3) et (3.4) dans la relation (3.2), conduit à :

$$X_{eff}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) \cdot d\nu = 2 \cdot \int_0^{+\infty} S_X(\nu) \cdot d\nu \quad (3.6)$$

Nous pouvons définir une densité spectrale de bruit, $\gamma_X(f)$ pour les fréquences positives utilisées dans le domaine physique, telle que :

$$\gamma_X(f) = 2 \cdot S_X(\nu) \quad (3.7)$$

La relation (3.6) devient alors :

$$X_{eff}^2 = \int_0^{+\infty} \gamma_X(f) \cdot df \quad (3.8)$$

3.3 - Filtrage linéaire et bruit

3.3.1 - Réponse d'un filtre linéaire

Considérons un filtre linéaire de **réponse percussionnelle** $R(t)$ et de **fonction de transfert** $G(f)$ (Fig. 3.1). Les grandeurs $R(t)$ et $G(f)$ sont liées par :

$$\text{TF}[R(t)] = G(\nu) \quad (3.9)$$



Fig. 3.1 - Filtre linéaire.

La réponse à la sortie du filtre est donnée par le **produit de convolution** entre le signal d'entrée et la réponse percussive du filtre :

$$Y(t) = R(t) \otimes X(t) \quad (3.10)$$

Soit :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\theta) \cdot R(t - \theta) \cdot d\theta \quad (3.11)$$

Calculons la fonction d'autocorrélation :

$$C_{YY}(\tau) = E[Y(t) \cdot Y^*(t + \tau)] = E[(R(t) \otimes X(t)) \cdot (R(t + \tau) \otimes X(t + \tau))^*] \quad (3.12)$$

Soit :

$$C_{YY}(\tau) = \iint R(t - \theta') \cdot R^*(t + \tau - \theta'') \cdot C_{XX}(\theta' - \theta'') \cdot d\theta' \cdot d\theta'' \quad (3.13)$$

En introduisant les transformées de *Fourier* de R et de C_{XX} , et en intégrant en θ' et θ'' , les relations (3.13) et (3.1) conduisent à :

$$C_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\nu)|^2 \cdot S_X(\nu) \cdot \exp(j2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot \tau) \cdot d\nu \quad (3.14)$$

La relation (3.14) conduit à :

$$S_Y(\nu) = |G(\nu)|^2 \cdot S_X(\nu) \quad (3.15)$$

Ou encore :

$$\gamma_Y(f) = |G(f)|^2 \cdot \gamma_X(f) \quad (3.16)$$

3.3.2 - Filtre de fonction de transfert unité

Considérons un filtre linéaire pour lequel $G(f)=1$, sur une bande de fréquences Δf autour de f_0 (Fig. 3.2).

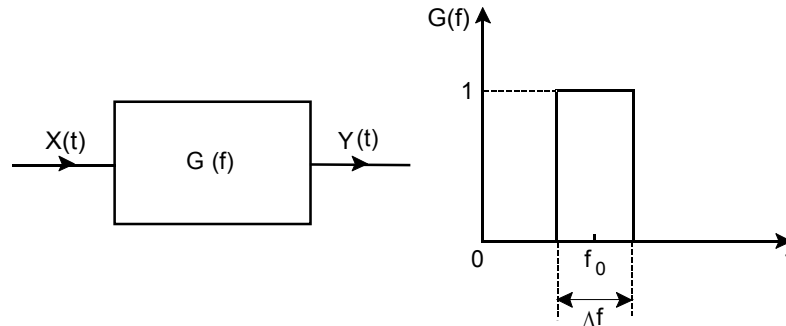


Fig. 3.2 - Filtre linéaire.

Dans ce cas, nous obtenons :

$$\gamma_Y(f) = \gamma_X(f) \quad \text{sur la bande } \Delta f \quad (3.17)$$

$$\gamma_Y(f) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad (3.18)$$

3.3.3 - Cas de filtres linéaires disjoints

Considérons deux filtres linéaires disjoints, pour lesquels $G_i(f)=1$, sur une bande de fréquences Δf_i autour de f_i (Fig. 3.3). Ces deux filtres sont soumis au même signal d'entrée, et délivrent en sortie deux signaux **non corrélés** ou indépendants.

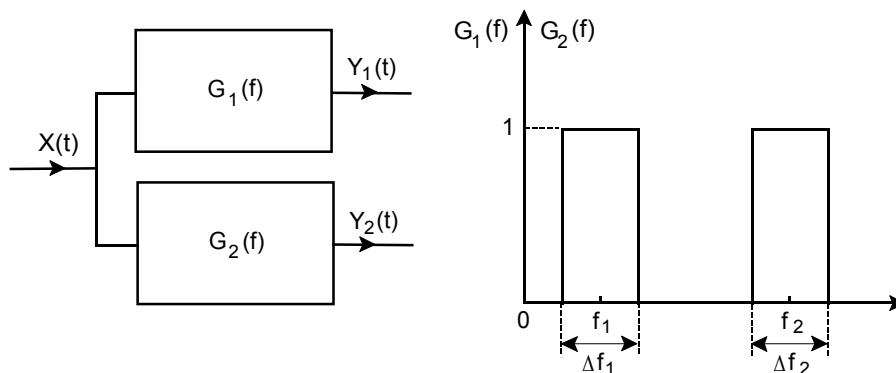


Fig. 3.3 - Filtrés linéaire disjoints.

Nous obtenons :

$$\gamma_{Y_1}(f) = \gamma_X(f) \quad \text{sur la bande } \Delta f_1 \quad (3.19)$$

$$\gamma_{Y_1}(f) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad (3.20)$$

$$\gamma_{Y_2}(f) = \gamma_X(f) \quad \text{sur la bande } \Delta f_2 \quad (3.21)$$

$$\gamma_{Y_2}(f) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad (3.22)$$

En utilisant la relation (3.8), nous pouvons également déterminer les valeurs quadratiques moyennes en sortie :

$$Y_{1_{eff}}^2 = \int_0^{\infty} \gamma_{Y_1}(f) \cdot df = \int_{f_1 - \frac{\Delta f_1}{2}}^{f_1 + \frac{\Delta f_1}{2}} \gamma_X(f) \cdot df \quad (3.23)$$

$$Y_{2_{eff}}^2 = \int_0^{\infty} \gamma_{Y_2}(f) \cdot df = \int_{f_2 - \frac{\Delta f_2}{2}}^{f_2 + \frac{\Delta f_2}{2}} \gamma_X(f) \cdot df \quad (3.24)$$

Si l'on suppose que Δf_1 et Δf_2 sont petits, les relations (3.23) et (3.24) conduisent à :

$$Y_{1_{eff}}^2 = \gamma_X(f_1) \cdot \Delta f_1 \quad (3.25)$$

$$Y_{2_{eff}}^2 = \gamma_X(f_2) \cdot \Delta f_2 \quad (3.26)$$

Si nous généralisons à une infinité de filtres de bandes de fréquences disjointes, leur réunion donnerait tout le domaine des fréquences. Les signaux de sortie sont tous décorrélés et par conséquent, nous pouvons sommer leurs valeurs quadratiques moyennes. Nous obtenons alors le signal d'entrée tout entier :

$$X_{eff}^2 = \sum_{f_i=0}^{f_i=\infty} Y_{i_{eff}}^2 \quad (3.27)$$

La généralisation des relations (3.25) et (3.26) permettent d'écrire :

$$Y_{i_{eff}}^2 = \gamma_X(f_i) \cdot \Delta f_i \quad (3.28)$$

Nous pouvons déterminer la valeur quadratique moyenne du signal d'entrée en fonction de sa densité spectrale de puissance de bruit :

$$X_{eff}^2 = \sum_{f_i=0}^{f_i=\infty} \gamma_X(f) \cdot \Delta f_i \quad (3.29)$$

En pratique, la sommation n'est jamais étendue de 0 à l'infini. On s'intéresse plutôt à un domaine de fréquences Δf autour de f . Dans ce cas, la variation de la valeur quadratique moyenne est donnée par :

$$\Delta X_{eff}^2 = \gamma_x(f) \cdot \Delta f \quad (3.30)$$

Si Δf devient infiniment petit, la relation (3.30) conduit à la relation (3.8).

3.3.4 - Normalisation de la notation

La densité spectrale de bruit peut se référer à une tension, à un courant ou à une puissance. Par la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\gamma(f)$ (V^2 / Hz) : densité spectrale de tension de bruit ;
- $\eta(f)$ (A^2 / Hz) : densité spectrale de courant de bruit ;
- $w(f)$ (W / Hz) : densité spectrale de puissance de bruit ;

Ces grandeurs sont liées aux valeurs quadratiques moyennes de la tension, du courant ou de la puissance par :

$$\Delta U_{eff}^2 = \langle U^2 \rangle = \gamma(f) \cdot \Delta f \quad (3.31)$$

$$\Delta I_{eff}^2 = \langle I^2 \rangle = \eta(f) \cdot \Delta f \quad (3.32)$$

$$\Delta P = w(f) \cdot \Delta f \quad (3.33)$$

3.4 - Bruit blanc

Un bruit est « blanc » si sa densité spectrale est constante. Dans ces conditions, la relation (3.8) conduit à une valeur quadratique infinie, ce qui n'a pas de réalité physique. Généralement, on définit un bruit blanc en considérant que sa densité spectrale est constante sur une plage de fréquences (Fig. 3.4).

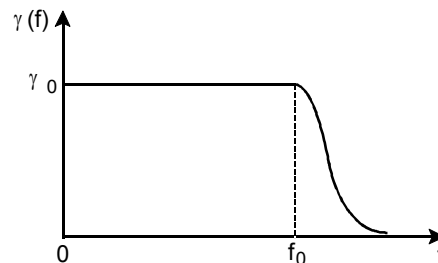


Fig. 3.4 - Densité spectrale d'un bruit blanc.

3.5 - Bande passante de bruit

La bande passante de bruit, ou bande équivalente de bruit d'un système de fonction de transfert $G(f)$, est la bande passante du filtre passe bas idéal (filtre cardinal) qui donnerait la même valeur quadratique moyenne de la tension de bruit en sortie qu'un filtre réel, lorsque le bruit à l'entrée du filtre est un bruit blanc.

Considérons un filtre de fonction de transfert $G(f)$ attaqué par un signal d'entrée bruyant $e(t)$ et délivrant un signal de sortie $s(t)$ (Fig. 3.5).

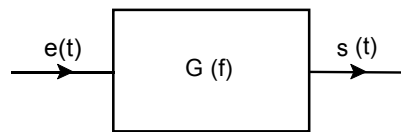


Fig. 3.5 - Filtre linéaire.

En sortie, nous avons :

$$U_{s_{eff}}^2 = \int_0^{\infty} \gamma_s(f) \cdot df \quad (3.34)$$

Avec :

$$\gamma_s(f) = |G(f)|^2 \cdot \gamma_e(f) \quad (3.35)$$

Les relations (3.34) et (3.35) conduisent à :

$$U_{s_{eff}}^2 = \int_0^{\infty} |G(f)|^2 \cdot \gamma_e(f) \cdot df \quad (3.36)$$

Supposons que $e(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale $\gamma_e(f) = \gamma_0$. Nous obtenons alors :

$$U_{s_{eff}}^2 = \gamma_0 \cdot \int_0^{\infty} |G(f)|^2 \cdot df \quad (3.37)$$

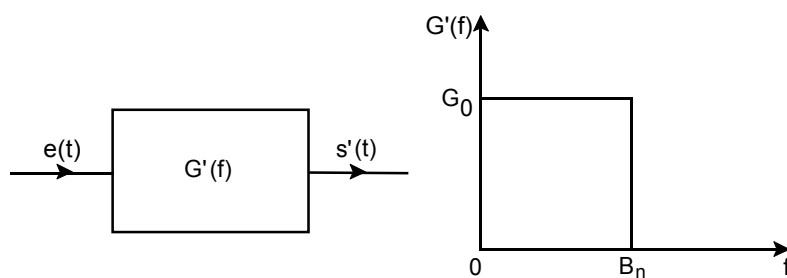


Fig. 3.6 - Filtre cardinal.

Considérons maintenant, la valeur quadratique moyenne de la tension de bruit à la sortie d'un filtre cardinal (Fig. 3.6).

La constante G_0 est obtenue à partir du premier filtre. C'est la valeur de $G(f)$ pour $f = 0$.

La valeur quadratique moyenne de la tension de bruit en sorti est donnée par :

$$U'_{s_{eff}}{}^2 = \gamma_0 \cdot \int_0^{\infty} |G'(f)|^2 \cdot df \quad (3.38)$$

Soit :

$$U'_{s_{eff}}{}^2 = \gamma_0 \cdot G_0^2 \cdot B_n \quad (3.39)$$

La définition de la bande équivalente de bruit impose :

$$U_{s_{eff}}{}^2 = U'_{s_{eff}}{}^2 \quad (3.40)$$

Les relations (3.37), (3.39) et (3.40) conduisent à :

$$B_n = \frac{1}{G_0^2} \cdot \int_0^{\infty} |G(f)|^2 \cdot df \quad (3.41)$$

La valeur quadratique moyenne de la tension de bruit en sortie, donnée par la relation (3.37) s'écrit :

$$U_{s_{eff}}{}^2 = G_0^2 \cdot \gamma_0 \cdot B_n \quad (3.42)$$

La relation (3.42) montre que la diminution de B_n permet d'atténuer la valeur quadratique moyenne de la tension de bruit en sortie. Cependant, B_n doit être suffisamment élevée pour transmettre correctement un signal. Ces considérations imposent un choix optimum pour la bande passante d'un système.

Bibliographie

- [1] B. PICINBONO, « Introduction à l'étude des signaux et phénomènes aléatoires » *Ed. Dunod*, Paris, 1971.
- [2] B. DEMOULIN, « Processus aléatoires » *Les techniques de l'ingénieur*, R210, p. 1-23.
- [3] B. DEMOULIN, « Fonctions aléatoires » *Les techniques de l'ingénieur*, R220, p. 1-16.
- [4] M. SAVELLI, J. CAMALLONGA, L. BOGGIANO, « Bruit de fond et mesures » *Les techniques de l'ingénieur*, E 1150 R 310, p. 1-31.