

Formalisme des processus aléatoires

2.1 - Signal déterministe et signal aléatoire

2.1.1 - Signal déterministe

Les signaux **déterministes** sont connus par leur représentation temporelle et spectrale.

Dans le domaine temporel, un signal déterministe est un signal dont on peut déterminer la valeur à l'instant $t + \tau$, par la connaissance de sa valeur à l'instant t .

Dans le domaine spectral, le spectre du signal permet par exemple, de donner une indication sur l'énergie contenue dans le signal en fonction de la fréquence.

Les signaux déterministes simples sont généralement caractérisés par un petit nombre de paramètres. Par exemple, un signal continu est totalement déterminé si l'on connaît son amplitude. Un signal sinusoïdal est complètement déterminé si l'on connaît son amplitude, sa fréquence et sa phase à l'origine.

2.1.2 - Signal aléatoire

Par opposition aux signaux déterministes, le bruit est un signal **aléatoire**, c'est à dire que les signaux de bruit sont liés au **hasard**. Le bruit sera donc modélisé par des fonctions aléatoires et traité par les lois de la théorie des probabilités, aussi bien dans le domaine temporel (distribution en amplitude) que dans le domaine spectral (densités spectrales).

Un signal aléatoire ne peut pas être complètement déterminé par un nombre fini de paramètres. Nous montrerons cependant que pour la plupart des signaux aléatoires d'origine physique, une connaissance des propriétés moyennes du signal est plus utile qu'une description exacte et détaillée de sa variation en fonction du temps.

Nous verrons plus tard, que le bruit est un processus aléatoire, souvent considéré comme stationnaire et ergodique et de valeur moyenne nulle.

2.2 - Variables et fonctions aléatoires

Les **processus aléatoires** sont décrits par des **variables aléatoires**. Généralement, en électronique, ces variables aléatoires dépendent du temps. On parle alors de **fonctions aléatoires**. Lorsque le temps est échantillonné, la fonction aléatoire s'exprime comme un système de n variables aléatoires, pouvant présenter des critères de dépendance **stochastique**. Les variables aléatoires ou les fonctions aléatoires peuvent être **réelles** ou **complexes**.

Dans la plupart des cas, la connaissance des propriétés moyennes d'un signal aléatoire est plus utile et surtout plus accessible que la connaissance exacte de sa variation en fonction du temps.

2.2.1 - Moyennes

On peut définir deux types de moyennes :

- la moyenne spatiale ;
- la moyenne temporelle.

Prenons pour variable aléatoire $X_1(t)$, la variation de tension du réseau de distribution basse tension EDF, par rapport à la tension nominale en un point d'une ville. En N points différents de la ville, nous pouvons considérer des variations $X_2(t), X_3(t), \dots, X_N(t)$. Il est donc possible d'observer aux mêmes instants, différentes variables aléatoires se reportant au même processus aléatoire.

La **moyenne spatiale** ou **moyenne d'ensemble** est définie par :

$$m_X(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} X_i(t_0) \quad (2.1)$$

On obtient ainsi une fonction qui varie avec le temps.

Pour la gestion du réseau, il est souvent plus utile de disposer de la variation de tension du réseau en un point donné de la ville, mais en fonction du temps. Il est alors possible de définir la **moyenne temporelle**.

La moyenne temporelle d'un processus aléatoire continu, est donnée par :

$$\langle X_i \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} X_i(t) \cdot dt \quad (2.2)$$

En principe, on peut obtenir une bonne estimation de la moyenne spatiale avec un grand nombre de points d'observation N , et une bonne estimation de la moyenne temporelle avec une grande durée d'observation ΔT .

Les moyennes spatiales ou temporelles sont souvent appelées « **moments du premier ordre** »

2.2.2 - Variance, écart type et valeur efficace

La **variance** d'un ensemble de variables aléatoires est définie comme une moyenne spatiale :

$$\text{var } X(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} [X_i(t_0) - m_X(t_0)]^2 \quad (2.3)$$

La variance représente la moyenne quadratique de « l'écart à la moyenne » des variables aléatoires considérées.

On note également :

$$\text{var } X(t_0) = \sigma_X^2 \quad (2.4)$$

— σ : est l'**écart type**.

La valeur efficace de la variable $X_i(t_0)$, est définie par une moyenne temporelle :

$$X_{i\text{eff}}^2 = \langle X_i^2 \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} [X_i(t)]^2 \cdot dt \quad (2.5)$$

Les relations (2.5) montre que la valeur efficace est égale à la racine carrée de la moyenne temporelle du carré du signal, que l'on appelle également, « **valeur quadratique moyenne** » ou « **moment du deuxième ordre** »

2.3 - Propriétés des variables aléatoires temporelles

2.3.1 - Indépendance ou incohérence

Deux variables aléatoires temporelles X et Y , sont indépendantes si la moyenne temporelle de leur produit est égale au produit de leurs moyennes temporelles :

$$\langle X.Y \rangle = \langle X \rangle . \langle Y \rangle \quad (2.6)$$

2.3.2 - Stationnarité

Un processus aléatoire est **stationnaire** si ses propriétés statistiques d'ensemble ne dépendent pas de l'instant choisi. La **stationnarité au premier ordre** se traduit au niveau des moyennes par :

$$\forall t_1, t_2, \dots, t_i: \quad m_X(t_1) = m_X(t_2) = \dots = m_X(t_i) \quad (2.7)$$

La **stationnarité au deuxième ordre** se traduit au niveau des variances par :

$$\forall t_1, t_2, \dots, t_i: \quad \text{var } X(t_1) = \text{var } X(t_2) = \dots = \text{var } X(t_i) \quad (2.8)$$

La stationnarité stricte est difficile à vérifier. Par contre il est possible de considérer qu'un phénomène est stationnaire si ses propriétés statistiques d'ensemble ne dépendent pas de l'instant choisi sur un intervalle de temps grand devant celui du processus.

2.3.3 - Ergodisme

Un processus aléatoire est **ergodique**, si les moyennes d'ensemble et les moyennes temporelles sont identiques :

$$\forall t_0 \text{ et } \forall k, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} X_i(t_0) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} X_k(t) \cdot dt \quad (2.9)$$

Remarquons que l'ergodisme implique la stationnarité.

A partir d'une observation instantanée sur un grand nombre d'échantillons d'un processus ergodique, il est possible de faire des prédictions sur l'évolution temporelle de ce processus.

Dans le cas d'un processus ergodique, nous pouvons confondre les moyennes d'ensemble et les moyennes temporelles.

2.3.3.1 - Relation entre valeur efficace et variance d'un processus ergodique

Sur un nombre d'échantillons relativement grand, la variance de la variable aléatoire temporelle $X(t)$, stationnaire et ergodique s'écrit sous la forme :

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (X - \langle X \rangle)^2 \quad (2.10)$$

Développons la relation (2.10) :

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} X^2 - 2 \cdot \langle X \rangle \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} X + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \langle X \rangle^2 \quad (2.11)$$

En considérant les relations (2.5), (2.1) et (2.9), nous obtenons :

$$\sigma_X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = X_{\text{eff}}^2 - m_X^2 \quad (2.12)$$

2.3.3.2 - Addition de deux processus indépendants ergodiques

Considérons deux processus aléatoires indépendants ergodiques X et Y , de valeurs moyennes nulles :

$$\langle X \rangle = \langle Y \rangle = 0 \quad (2.13)$$

$$\langle X \cdot Y \rangle = \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle = 0 \quad (2.14)$$

L'addition de ces deux processus conduit à :

$$Z = X + Y \quad (2.15)$$

C'est à dire :

$$Z^2 = X^2 + Y^2 + 2.X.Y \quad (2.16)$$

La valeur efficace, définie comme la valeur quadratique moyenne, conduit à :

$$\langle Z^2 \rangle = \langle X^2 \rangle + \langle Y^2 \rangle \quad (2.17)$$

$$Z_{eff}^2 = X_{eff}^2 + Y_{eff}^2 \quad (2.18)$$

2.4 - Distribution d'amplitude

2.4.1 - Fonction de répartition ou fonction de distribution

La **fonction de répartition** traduit la probabilité $F(x)$ qu'a l'amplitude instantanée $X(t)$ d'un signal d'être inférieure à une valeur de référence x donnée :

$$F(x) = \text{Prob}[X < x] \quad (2.19)$$

2.4.2 - Densité de probabilité

Dans bon nombre de phénomènes physiques, la probabilité de trouver la variable $X(t)$ inférieure à x est une quantité infinitésimale. Pour cette raison, on préfère lui associer la notion de **densité de probabilité** définie comme la dérivée de la fonction de répartition par rapport à x :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.20)$$

La densité de probabilité caractérise la distribution d'amplitude en position et en dispersion, mais elle ne donne aucune indication sur la rapidité des ses variations temporelles.

La densité de probabilité obéit à une condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1 \quad (2.21)$$

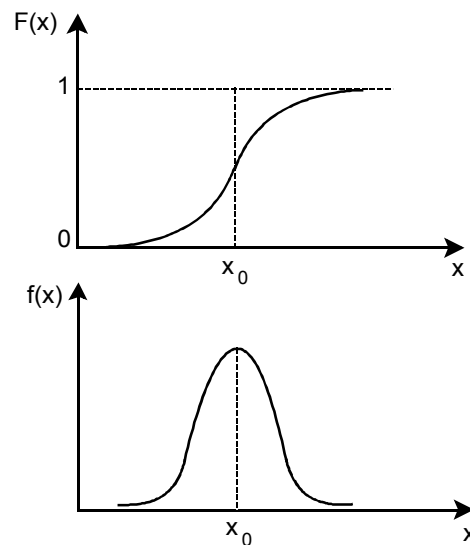


Fig. 2.1 - Exemple de fonction de distribution et densité spectrale associée.

2.4.3 - Moments

Nous pouvons définir les différents moments à partir de la densité de probabilité.

2.4.3.1 - Moment du premier ordre ou valeur moyenne

La **valeur moyenne** ou **moment du premier ordre** ou encore **espérance mathématique** d'une variable aléatoire X est définie par :

$$\langle X \rangle = \overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \quad (2.22)$$

2.4.3.2 - Moment du deuxième ordre ou moyenne quadratique

Le moment du deuxième ordre est défini par :

$$\langle X^2 \rangle = \overline{X^2} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx \quad (2.23)$$

2.4.3.3 - Moment d'ordre n

La généralisation des relations précédentes conduit à :

$$\langle X^n \rangle = \overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f(x) \cdot dx \quad (2.24)$$

2.5 - Covariance et fonction d'autocorrélation

2.5.1 - Covariance

2.5.1.1 - Définition

Considérons une fonction aléatoire $X(t)$ et la valeur de deux échantillons $X(t_1)$ et $X(t_2)$, aux instants t_1 et t_2 .

La covariance est définie par :

$$C_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1).X(t_2)] \quad (2.25)$$

Introduisons le décalage τ entre les instants d'observation :

$$\tau = t_2 - t_1 \quad (2.26)$$

La covariance s'exprime alors par :

$$C_{XX}(t_1, \tau) = E[X(t_1).X(t_1 + \tau)] \quad (2.27)$$

Considérons maintenant le cas où la **fonction aléatoire** $X(t)$ est **complexe**, c'est à dire qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$X(t) = A(t) + j.B(t) \quad (2.28)$$

— $A(t)$ et $B(t)$: sont des fonctions aléatoires réelles.

Dans ce cas, la covariance s'exprime sous la forme :

$$C_{XX}(t_1, \tau) = E[X(t_1).X^*(t_1 + \tau)] \quad (2.29)$$

— X^* : est le **complexe conjugué** de la fonction aléatoire X .

2.5.1.2 - Propriétés

Si le décalage entre les instants d'observation s'accroît indéfiniment, les valeurs des deux échantillons deviennent indépendantes. La relation (2.27) se réduit au produit des espérances mathématiques :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_{XX}(t_1, \tau) = E[X(t_1)].E[X(t_1 + \tau)] \quad (2.30)$$

Lorsque l'écart de temps entre les deux observations diminue, la covariance atteint sa valeur maximum. C'est ainsi que :

$$C_{XX}(t_1, 0) > C_{XX}(t_1, \tau) \quad (2.31)$$

2.5.2 - Fonction d'autocorrélation

2.5.2.1 - Définition

La fonction d'autocorrélation est la covariance d'une fonction aléatoire stationnaire au deuxième ordre :

$$C_{XX}(\tau) = E[X(t).X(t+\tau)] \quad (2.32)$$

En tenant compte de la relation (2.2) :

$$C_{XX}(\tau) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+\Delta T} X(t).X(t+\tau).dt \quad (2.33)$$

Dans le cas d'une **fonction aléatoire complexe**, la fonction d'autocorrélation se déduit de la relation (2.29) :

$$C_{XX}(\tau) = E[X(t).X^*(t+\tau)] \quad (2.34)$$

2.5.2.2 - Propriétés

Lorsque $\tau = 0$, les relations (2.32) et (2.5) conduisent à :

$$C_{XX}(0) = E[(X(t))^2] = \langle X^2 \rangle = X_{eff}^2 \quad (2.35)$$

En raison de la stationnarité au deuxième ordre, la **fonction d'autocorrélation est paire**. En remplaçant dans la relation (2.32), t par $(t-\tau)$, nous obtenons :

$$E[X(t).X(t+\tau)] = E[X(t-\tau).X(t)] = E[X(t).X(t-\tau)] \quad (2.36)$$

Soit :

$$C_{XX}(\tau) = C_{XX}(-\tau) \quad (2.37)$$

Compte tenu de la relation (2.28), et dans le cas d'un processus ergodique, nous avons :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_{XX}(\tau) = (E[X(t)])^2 = m_X^2 \quad (2.38)$$

$$C_{XX}(0) = E[(X(t))^2] = \langle X^2 \rangle = X_{eff}^2 = \sigma_X^2 + m_X^2 \quad (2.39)$$

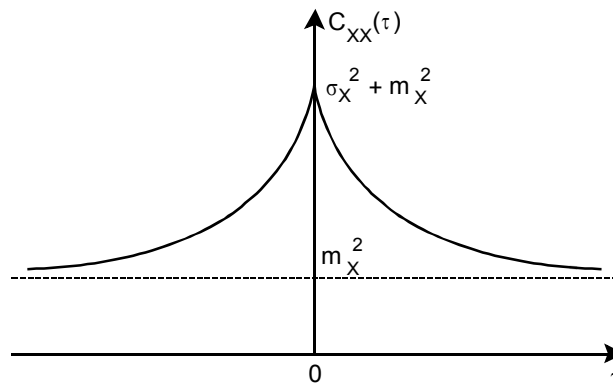


Fig. 2.2 - Fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire et ergodique.

2.6 - Fonctions d'intercorrélation

2.6.1 - Définition

La liaison entre deux fonctions aléatoires stationnaires $X(t)$ et $Y(t)$ est caractérisée par les **fonctions d'intercorrélation** définies par :

$$C_{XY}(\tau) = E[X(t).Y(t + \tau)] \quad (2.40)$$

$$C_{YX}(\tau) = E[Y(t).X(t + \tau)] \quad (2.41)$$

En tenant compte de la relation (2.33), nous avons :

$$C_{XY}(\tau) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} X(t).Y(t + \tau).dt \quad (2.42)$$

2.6.2 - Propriétés

$$C_{XY}(\tau) = C_{YX}(\tau) \quad (2.43)$$

$$C_{XY}(\tau) \neq C_{XY}(-\tau) \quad (2.44)$$

Bibliographie

- [1] B. PICINBONO, « Introduction à l'étude des signaux et phénomènes aléatoires » *Ed. Dunod*, Paris, 1971.
- [2] B. DEMOULIN, « Processus aléatoires » *Les techniques de l'ingénieur*, R210, p. 1-23.
- [3] B. DEMOULIN, « Fonctions aléatoires » *Les techniques de l'ingénieur*, R220, p. 1-16.