CHAPITRE 1

Rappels sur les signaux

1.1 - Introduction

Un signal électrique est toujours associé à deux types de grandeurs :

— le signal qui contient l'information normalement utile :

— le bruit qui généralement est considéré comme un parasite se superposant à l'information.

La suite de ce cours fait largement appel à des notions qui sont normalement connues par tous, à ce niveau de la scolarité. Cependant, pour fixer le idées et utiliser une notation conforme, il n'est pas inutile de rappeler brièvement les différents types de signaux et les grandeurs caractéristiques qui leur sont associées.

1.2 - Les différents types de signaux

Les signaux peuvent être classés en deux familles :

— les signaux continus ;

— les signaux variables.

1.2.1 - Signal continu

Par définition, un signal continu est invariant au cours du temps. Le signal continu est complètement déterminé si l'on connaît son amplitude.

1.2.2 - Signal variable

Un signal variable dépend du temps. Il existe plusieurs types de signaux variables, définis selon la nature de leur variation avec le temps.

1.2.2.1 - Signal périodique

Un signal périodique est déterminé si l'on connaît les éléments de la série de *Fourier.* Ces éléments sont basés sur :

— la nature du signal (forme) ;
— sa fréquence ou sa période ;
— son amplitude.

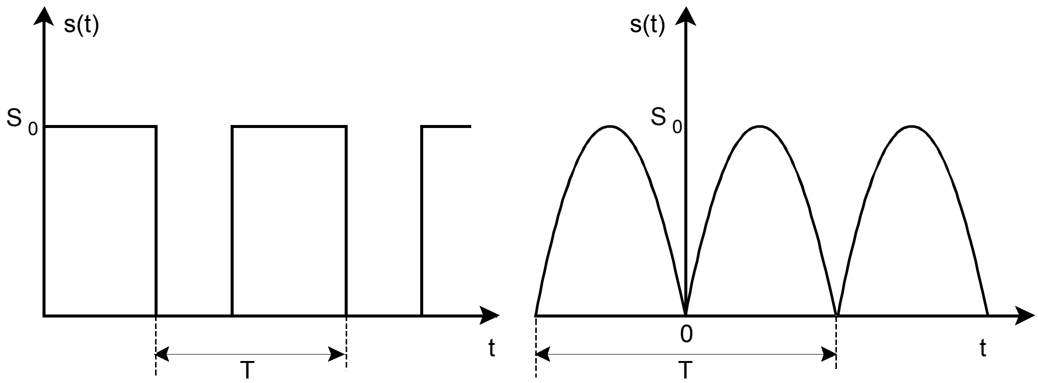

Fig. 1.1 - Exemples de signaux périodiques.

Le signal peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\cos n.\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n.\sin n.\omega t \tag{1.1}$$

Avec :

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} s(t).\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

$$A_n = \frac{2}{T}.\int_{t_0}^{T+t_0} s(t).\cos n.\omega t.\mathrm{d}t \qquad = 0 \text{ si } s(t) \text{ est impair} \tag{1.3}$$

$$B_n = \frac{2}{T}.\int_{t_0}^{T+t_0} s(t).\sin n.\omega t.\mathrm{d}t \qquad = 0 \text{ si } s(t) \text{ est pair} \tag{1.4}$$

Soit en notation complexe :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n.\exp(\mathrm{j}n.\omega t) \tag{1.5}$$

Avec :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} s(t).\exp(-\mathrm{j}n.\omega t).dt \tag{1.6}$$

$$C_n = \frac{1}{2}\left(A_n - \mathrm{j}B_n\right) \quad \text{pour } n > 0 \tag{1.7}$$

$$C_n = \frac{1}{2}\left(A_{-n} - \mathrm{j}B_{-n}\right) \quad \text{pour } n < 0 \tag{1.8}$$

$$C_n = \frac{1}{2}\mathrm{A}_0 \quad \text{pour } n = 0 \tag{1.9}$$

1.2.2.2 - Signal harmonique

Le signal harmonique est un cas particulier du signal périodique. Le signal harmonique est complètement déterminé si l'on connaît :

— sa fréquence ou sa période ;
— sa phase à l'origine ;
— son amplitude.

Le signal harmonique peut être représenté dans l'espace temporel ou fréquentiel.

1.2.2.3 - Signal transitoire

Par définition, un signal transitoire est un signal variable de durée définie, qui s'établit généralement entre deux états permanents. En fait n'importe quel signal peut passer par un **état transitoire.** Par exemple, lorsque nous appuyons sur le bouton « marche/arrêt » d'une alimentation continue, le courant et la tension délivrés passent par un état transitoire qui est lié à la nature de l'alimentation et du circuit dans laquelle elle débite. Dans le langage courant, un signal transitoire est assimilé à un signal non périodique qui change brusquement d'état.

Un signal transitoire est représenté dans l'espace temporel. Il est complètement déterminé par les termes de la transformée de *Laplace :*

$$S(p) = \int_0^\infty s(t).\exp(-p.t).\mathrm{d}t \tag{1.10}$$

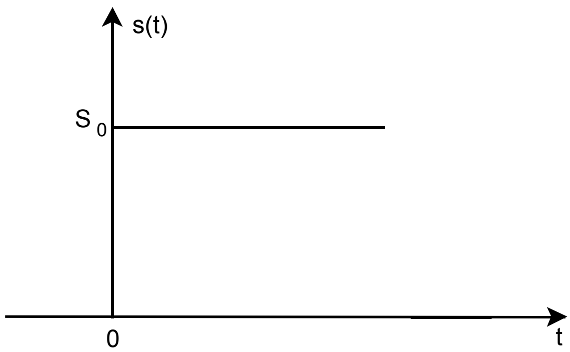

Fig. 1.2 - Exemple de signal transitoire.

Dans le cas du signal de la figure 1.2, nous avons :

$$s(t) = S_0 \quad \text{pour } t = 0^+ \tag{1.11}$$

$$s(t) = 0 \quad \text{pour } t = 0^- \tag{1.12}$$

$$S(p) = \frac{S_0}{p} \tag{1.13}$$

1.2.2.4 - Signal aléatoire

Un signal aléatoire est un signal variable qui peut dépendre du temps ou en être indépendant. Les variations de ce signal sont imprévisibles et liées au hasard.

Par contre, sur une certaine plage d'observation, il est possible de tirer des enseignements sur un signal aléatoire. La densité de probabilité d'un signal aléatoire permet d'en déterminer les moments (valeur moyenne, variance et moments d'ordre supérieur) qui permettrons de caractériser le signal.

1.2.2.5 - Signal quelconque

Nous considérerons qu'un signal est quelconque, s'il n'entre pas dans l'une des catégories que nous venons de décrire. En fait, sur un domaine d'étude restreint, il est toujours possible d'assimiler un signal quelconque à l'une des catégories précédentes.

1.3 - Grandeurs associées aux signaux

Les signaux peuvent être définis par un certain nombre de grandeurs caractéristiques dont il convient de connaître avec précision, la définition et la signification physique.

1.3.1 - Valeur instantanée

La valeur instantanée d'un signal $s(t)$, permet de caractériser le signal à un instant donné. Cette notion de valeur instantanée s'applique quel que soit le type de signal. Il est évident que la connaissance d'une seule valeur instantanée, ne suffit pas à définir complètement un signal.

La valeur instantanée d'un signal n'est pas une grandeur physiquement mesurable.

1.3.2 - Valeur moyenne

La notion de valeur moyenne temporelle d'un signal s'applique aux signaux variables. La valeur moyenne d'un signal, sur un intervalle de temps, est définie par :

$$\overline{S} = \langle S \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} . \int_{t_1}^{t_2} s(t).\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

La valeur moyenne d'un signal est une grandeur physiquement mesurable.

Dans le cas d'un signal sinusoïdal redressé double alternance, nous avons :

$$\langle S \rangle = \frac{2.S_0}{\pi} \tag{1.15}$$

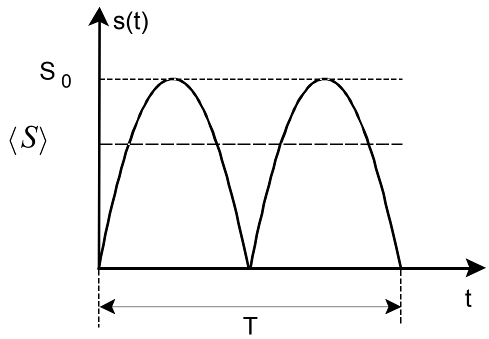

Fig. 1.3 - Valeur moyenne d'un signal sinusoïdal redressé double alternance.

1.3.3 - Valeur efficace

La notion de valeur efficace d'un signal, ou valeur quadratique moyenne, s'applique aux signaux variables. Le carré de la valeur efficace d'un signal, sur un intervalle de temps, est définie par :

$$S_{eff}{}^2 = \langle S^2 \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} . \int_{t_1}^{t_2} s(t)^2 .\mathrm{d}t \tag{1.16}$$

La valeur efficace d'un signal est une grandeur physiquement mesurable. Nous donnerons plus tard, une définition plus physique de la valeur efficace, de même que nous verrons l'importance de la notion de valeur quadratique moyenne dans la théorie du bruit.

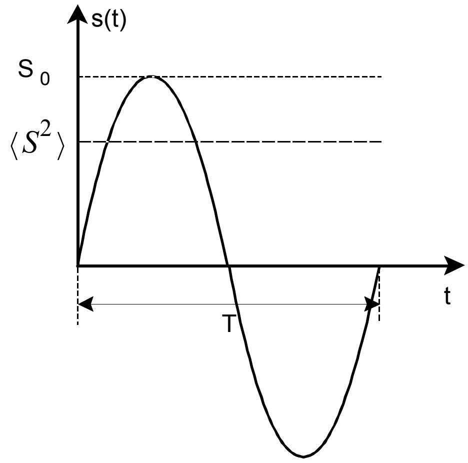

Fig. 1.4 - Valeur efficace d'un signal sinusoïdal.

Dans le cas du signal sinusoïdal de la figure 1.4, nous avons :

$$\langle S^2 \rangle = \frac{{S_0}^2}{2} \tag{1.17}$$

1.4 - Grandeurs électriques fondamentales

Les grandeurs électriques fondamentales sont :

— le courant i

— la tension u

— la puissance P

Ces grandeurs sont physiquement mesurables et sont liées entre elles par la loi d'*Ohm* généralisée.

Si le courant et la tension sont des grandeurs généralement bien appréhendées, la notion de puissance et ses différentes représentations le sont moins. Il nous semble utile de bien préciser ce point.

1.4.1 - Puissance instantanée

La puissance instantanée est définie par :

$$P(t) = i(t).u(t) \tag{1.18}$$

Notons que cette grandeur n'est pas physiquement mesurable.

1.4.2 - Puissance moyenne ou puissance active

La puissance moyenne ou puissance active est définie par :

$$P = \overline{P} = \langle P \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}.\int_{t_1}^{t_2} P(t).\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

Si un courant i est débité dans une charge purement résistive, l'énergie dissipée entre les instants t_1 et t_2 est donnée par :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} R.i^2.\mathrm{d}t = (t_2 - t_1).R.I^2 \tag{1.20}$$

Avec :

$$I^2 = \langle I^2 \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}.\int_{t_1}^{t_2} i(t)^2.\mathrm{d}t \tag{1.21}$$

Les relations (1.20) et (1.21) mettent en évidence la relation qui existe entre l'énergie et la valeur efficace ou la valeur quadratique moyenne du courant. Nous pouvons en donner l'interprétation physique suivante :

L'intensité efficace d'un courant est équivalente à l'intensité d'un courant continu qui, circulant dans une résistance pure, provoquerait le même dégagement de chaleur que le courant considéré, circulant dans la même résistance pendant le même intervalle de temps.

1.4.2.1 - Puissance active en régime harmonique

Considérons par exemple, deux signaux sinusoïdaux tels que :

$$i(t) = I.\sin\omega t \tag{1.22}$$

$$u(t) = U\sin\left(\omega t + \varphi\right) \tag{1.23}$$

La puissance active est donnée par la relation :

$$P = \frac{1}{2}.U.I.\cos\varphi \tag{1.24}$$

Soit :

$$P = \frac{1}{2}.\mathrm{Re}\left[U.I^*\right] \tag{1.25}$$

— I^* représente le complexe conjugué

1.4.2.2 - Puissance active en régime périodique

Le résultat précédent peut se généraliser aux composantes de la série de *Fourrier.* Dans ce cas, si la valeur moyenne du signal est nulle, nous avons pour les n harmoniques :

$$P = \frac{1}{2}.\sum_n U_n.I_n.\cos\varphi_n \tag{1.26}$$

1.5 - Transformée de Fourier

La transformée de *Fourier* permet de passer de l'espace temporel à l'espace fréquentiel. Elle est définie par :

$$\mathrm{TF}\left[f(t)\right] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\exp(-\mathrm{j}.\omega\mathrm{t}).\mathrm{d}t \tag{1.27}$$

La transformée de *Fourier* inverse permet de passer de l'espace fréquentiel à l'espace temporel :

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[F(\omega)\right] = f(t) = \frac{1}{2.\pi}.\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).\exp(\mathrm{j}.\omega\mathrm{t}).\mathrm{d}\omega \tag{1.28}$$